ANÁLISIS MATEMÁTICO II (284)

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden – parte 1

Material complementario – clase 18

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 15

Di Caro H., Gallego L. (1999). Análisis Matemático II con aplicaciones a la Economía. Ediciones Macchi; capítulo 10

Rita B. Morrone

Ecuaciones diferenciales

Definición:

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra derivadas de una función desconocida:

- Si la función desconocida depende sólo de una variable la ecuación se llama una *ecuación diferencial ordinaria (EDO).*
- Si la función desconocida depende de más de una variable (de tal modo que las derivadas son derivadas parciales) la ecuación se llama una *ecuación diferencial parcial*.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Formalmente una ecuación diferencial se expresa como:

$$\boldsymbol{F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0}$$

Siendo x la variable independiente, $y(x)$ es la incógnita, $y^n(x)$ es la derivada de $y(x)$, con respecto a x, n veces

Por ende, si $y = f(x)$, entonces, $y' = \frac{dy}{dx}; \dots; y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$.

Se las conoce como **ECUACIONES FUNCIONALES**, ya que **su incógnita es una FUNCIÓN**.

Las ecuaciones diferenciales se pueden caracterizar por:

- **ORDEN:** derivada más elevada que en ella aparece.
- **GRADO**: mayor exponente al que está elevada la derivada de mayor orden.
- **COEFICIENTES**: Factor que acompaña a las variables dependientes y sus derivadas.

Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Orden

- 1º orden:

$$\boldsymbol{y'(x) + 3y(x) = 4 - x}$$

- 2º orden:

$$3y''(x) - \mathrm{y(x)} = e^{x}$$

- Orden Superior:

$$\boldsymbol{y'''(x) + e^{x} - y''(x) = 6x}$$

Coeficientes

- Coeficientes Constantes:

$$\boldsymbol{2y'(x) + 3y(x) = 6x}$$

- Coeficientes Variables:

$$\boldsymbol{(5x)y'(x) + (x^{2})y(x) = 0}$$

Grado

- Grado 1:

$$\boldsymbol{y''(x) - y'(x)^{2} = 6x}$$

- Grado 2:

$$\boldsymbol{y'''(x)^{2} + y'(x) = 8}$$

Linealidad

- Lineales:

$$5y'(x) + 6x = 0$$

- No Lineales:

$$3y'(x) + 2y^{2} = 9x$$

Nota: clasificar las ecuaciones nos ayudará a saber que método debemos usar para la resolución

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Consideremos a una EDO de orden n :

$$\sum_{i=0}^{n} f_{n-i}(x) \cdot \ y^{n-i}\,(x) = g(x)$$

$$f_n(x) \cdot y^n(x) + f_{n-1}(x) \cdot y^{n-1}(x) + \cdots + f_0(x) \cdot y(x) = g(x)$$

Entonces diremos que si:

✓ $f_j(x)$ son funciones distintas de constantes, entonces la EDO presenta **COEFICIENTES VARIABLES**

✓ Si la EDO presenta **COEFICIENTES CONSTANTES**, entonces la EDO se escribe como:

$$a_n \cdot y^n(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{n-1}(x) + \cdots + a_0 \cdot y(x) = g(x)$$

Con $a_j \in \mathbb{R} \ \forall j$.

Ejemplo:

$$(y')^2 - 16x^2y = 0$$

- Es una ecuación de $\begin{cases} ORDEN\ 1 \\ GRADO\ 2 \\ COEFICIENTES\ \ VARIABLES \end{cases}$

Noten que $y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 16x^2y = 0$

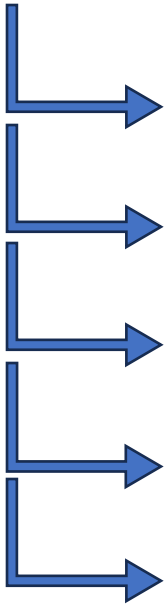
Se sabe que $\boxed{\boldsymbol{y(x) = \left(x^2 + C\right)^2}}$ es solución de la EDO. ¿Qué significa esto?

- Derivamos la solución: $y' = 2 \cdot (x^2 + C) \cdot 2x$
- La reemplazamos en la EDO: $\left[\underbrace{2 \cdot (x^2 + C) \cdot 2x}_{y'}\right]^2 - 16x^2\left[\underbrace{(x^2 + C)^2}_{y}\right] = 0 \quad \rightarrow 16(x^2 + C)^2 - 16(x^2 + C)^2 = 0$

Ahora bien, ¿cómo se halla la SOLUCIÓN de estas ecuaciones?

Para poder hallarla se debe primero clasificar el tipo de EDO y aplicar un método correspondiente a cada tipo

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 1° Orden



I. VARIABLES SEPARABLES

II. ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

III. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

IV. ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOULLI

V. ECUACIONES DIFERENCIALES DE EXACTAS

I.VARIABLES SEPARABLES

Una ecuación diferencial de primer orden, si se puede expresar de la forma:

$$F(x;y;y') = 0 \rightarrow métodos\ algebraicos \rightarrow\ y' = f(x)\cdot g(y)$$

puede resolverse por el método de "variables separables". Tienen ese nombre, ya que es posible despejar convenientemente de manera que quede de un lado de la igualdad toda la expresión de "y" y del otro todas las funciones de "x"

$$\textbf{Cómo } \boldsymbol{y' \equiv \frac{dy}{dx}} \quad \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)}$$

Despejando: $$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\cdot dx$$

Ya teniendo a cada variable de un lado de la igualdad, aplicando integrales se llega a la solución:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi(y) = \theta(x) + C}$$

- NOTA: A partir de este momento, en los ejercicios omitiremos (x) en las expresiones $y(x), y'(x)$, … dado que ya sabemos que siempre $y = f(x)$

Variables separables (resumiendo el método)

Se separan las variables
Cada miembro de la ecuación queda constituído por una sola variable y su diferencial
Luego se integra y resuelve

$$m(x).n(y)dx + r(x).w(y)dy = 0$$

$$\frac{m(x)}{r(x)}dx = -\frac{w(y)}{n(y)}dy$$

$$\int \frac{m(x)}{r(x)}dx = \int -\frac{w(y)}{n(y)}dy$$

$$F(x) + k1 = G(y) + k2$$

$$sc.general = F(x) = G(y) + C$$

Ejemplo : $3x\,y' - x^2y = 0$

En primer lugar, reordenamos un poco…

$$3x\,y' = x^2y \quad \rightarrow \quad y' = \frac{xy}{3}$$

Luego, sabemos que $y' = \frac{dy}{dx}$ $\rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{3}$

Separando las variables y tomando integrales, se tiene:

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{3}\,dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{x}{3}\,dx$$

Por lo tanto, resolviendo las integrales: $\ln y = \frac{x^2}{6} + C$

Ejemplo (continuación)

$$\ln y = \frac{x^2}{6} + C \quad \rightarrow \quad y = e^{\frac{x^2}{6}+C} \quad \rightarrow \quad y = e^{\frac{x^2}{6}} \cdot e^{C}$$

Si llamamos $e^C = k$, entonces la solución general de la EDO planteada es:

$$\boxed{y(x) = k\, e^{\frac{x^2}{6}}}$$ **SOLUCIÓN GENERAL**

Si queremos obtener una solución particular, debemos tener una condición inicial (C.I.) y con ella obtener el valor de k.

Supongamos que, nos dan como dato la siguiente condición inicial: $y(6) = 1$

$$y(x) = k\, e^{\frac{x^2}{6}} \quad \rightarrow \quad y(6) = k\, e^{\frac{6^2}{6}} = 1 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{e^6}$$

Es decir, que para la mencionada condición inicial: $\boxed{y^p(x) = e^{\frac{x^2}{6}-6}}$ **SOLUCIÓN PARTICULAR**

Resolución por separación de varables:

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por separación de variables.

a) $\frac{dy}{dx} = k\,y$

b) $y' = \frac{y-a}{x-b}$, con a y b constantes

$$dy = ky\,dx$$

$$\frac{1}{y}\,dy = k\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dx$$

$$\ln|y| = kx + c$$

$$\boldsymbol{y = ce^{kx}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-a}{x-b}$$

$$\frac{1}{y-a}\,dy = \frac{1}{x-b}\,dx$$

$$\int \underbrace{\frac{1}{y-a}}_{u}\,dy = \int \underbrace{\frac{1}{x-b}}_{t}\,dx$$

$$\ln|u| = \ln|t| + c$$

$$\boldsymbol{y = a + c(x-b)}$$

Resolvemos ambas integrales por sustitución

$$\begin{cases} u = y - a \\ du = 1dy \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = x - b \\ dt = 1dx \end{cases}$$

c) $y' = \dfrac{sen\ x}{sen\ y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\ x}{sen\ y}$$

$$sen\ y\ dy = senx\ dx$$

$$\int sen\ y\ dy = \int senx\ dx$$

$$\cos y = \cos x + c$$

$$\boldsymbol{\cos x - \cos y = c}$$

d) $(1+x^3)\,dy - x^2 y\,dx = 0$ si $f(1) = 2$

$$(1 + x^3)dy = x^2 y\ dx$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{x^2}{(1+x^3)}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{x^2}{\underbrace{(1+x^3)}_{u}}dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|u| + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|1 + x^3| + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|(1 + x^3).c|$$

$$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{c(1+x^3)}}$$

Resolvemos la integral por sustitución

$$u = 1 + x^3$$

$$du = 3x^2 dx$$

$$\frac{du}{3} = x^2 dx$$

Solución particular:

$$\frac{2^3}{(1+1^3)} = c$$

$$c = \frac{8}{2} = 4$$

$$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{4(1+x^3)}}$$

a) Encuentre la solución general de $\frac{dN}{dt} + a(t)\,N = 0$, donde $N = f(t)$ representa el número de individuos en función del tiempo, si $a(t)$ es una función continua. **b)** Si $a(t) = \alpha + bc^t$, con α, b, c positivos y $c \neq 1$, demuestre que la solución de la ecuación diferencial se la puede escribir en la forma $N(t) = kp^t q^{c^t}$, donde p y q son constantes determinadas por α, b, c ; mientras que k es una constante arbitraria. (Esta es la ley de mortalidad de Gompertz-Makeham).

a)

$$\frac{dN}{dt} + a(t)N = 0$$

$$\frac{dN}{dt} = -a(t)N$$

$$\frac{1}{N}dN = -a(t)dt$$

$$\int \frac{1}{N}dN = \int -a(t)dt$$

$$\ln|N| = \int -a(t)dt$$

$$\boldsymbol{N(t) = e^{\int -a(t)dt}}$$

b) $\frac{dN}{dt} + a(t)N = 0 \longrightarrow r = -a(t)$

$N(t) = k.e^{-a(t)t} \longrightarrow N(t) = k.e^{-(\alpha + bc^t)t}$

$N(t) = ke^{-\alpha t}e^{-bc^t t} \longrightarrow N(t) = ke^{-\alpha^t}e^{-\frac{b}{\ln c}^{c^t}}$

$$\boldsymbol{N(t) = kp^t q^{c^t}}$$

Donde : $p = e^{-\alpha}$, $q = e^{\frac{-b}{\ln c}}$

II. ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

Diremos que una EDO de 1er orden es una ecuación de tipo homogénea si tiene la forma:

$$F(x; y; y') = 0 \rightarrow métodos\ algebraicos \rightarrow \ \boldsymbol{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$$

Dónde $P(x,y) \ \wedge Q(x,y)$ son funciones **HOMOGÉNEAS DEL MISMO GRADO**.

Para resolver este tipo de Ecuaciones Diferenciales:

i. Dividimos a toda la EDO por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de $P(x,y) \ \vee Q(x,y)$)

ii. Planteamos una sustitución conveniente: $v = y/x$

Forma funcional $\boldsymbol{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$

Paso 1- Dividimos a toda la EDO por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de $P(x,y) \vee Q(x,y)$)

$$\frac{\boldsymbol{P(x,y)}}{x^n}dx + \frac{\boldsymbol{Q(x,y)}}{x^n}dy = 0$$

Paso 2- Planteamos la sustitución : $v = y/x$, luego diferenciamos

$$v = \frac{y}{x} \rightarrow y = vx \qquad dy = d(vx) \rightarrow \quad \boldsymbol{dy = v\,dx + x\,dv}$$

Paso 3 – Se sustituye lo obtenido y por métodos algebraicos se transforma en variables separables

$$f1\left(\frac{y}{x}\right)dx + f2\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

$$f1\,(v)dx + f2(v)dy = 0$$

$$f1\,(v)dx + f2(v)(\boldsymbol{v\,dx + x\,dv}) = 0$$

$$f1\,(v)dx + vf2(v)dx + xf2(v)dv = 0$$

$$(f1\,(v) + vf2(v))dx + xf2(v)dv = 0$$

Se transformó a la forma funcional de variables separables

Paso 4 - Se continua la resolución por método de variables separables

$$(f1\,(v) + vf2(v))dx + xf2(v)dv = 0$$

$$f1\,(v) + vf2(v)dx = -xf2(v)dv$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-f2(v)}{f1(v) + vf2(v)}dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-f2(v)}{f1(v) + vf2(v)}dv$$

$$ln|x| + ln|C| = F(v)$$

$$xC = e^{F(v)}$$

Solución general $\boldsymbol{xC = e^{F\left(\frac{y}{x}\right)}}$

Se separan las variables
Cada miembro de la ecuación queda constituído por una sola variable y su diferencial
Luego se integra y resuelve
Finalmente se revierte la sustitución hecha por las variables originales

Ejemplo

$$y^2 + (x^2 - xy)\, y' = 0$$

$y' = \frac{dy}{dx}$, entonces reacomodamos la expresión por métodos algebraicos:

$$y^2 + (x^2 - xy)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad y^2\, dx + (x^2 - xy)\, dy = 0$$

Forma funcional → $\boldsymbol{P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0}$

En esta ecuación: $P(x,y) = y^2$ ∧ $Q(x,y) = x^2 - xy$

Ambas son funciones homogéneas de grado 2.

Entonces haremos el procedimiento descripto para resolver:

Paso 1- Dividimos a toda la EDO por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de $P(x,y)$ ∨ $Q(x,y)$)

Paso 2- Planteamos la sustitución : $v = y/x$, luego diferenciamos

Paso 3 – Se sustituye lo obtenido y por métodos algebraicos se transforma en variables separables

Paso 4 - Se continua la resolución por método de variables separables

$$y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$$

Paso 1- Dividimos a toda la EDO por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de $P(x,y)\ \vee\ Q(x,y)$)

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2\,dx + \left(1 - \frac{y}{x}\right)\,dy = 0$$

Paso 2- Planteamos la sustitución : $v = y/x$, luego diferenciamos

$$\boldsymbol{v = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad dy = v\,dx + x\,dv}$$

Paso 3 – Se sustituye lo obtenido y por métodos algebraicos se transforma en variables separables

$$(v)^2\,dx + (1 - v)\,(v\,dx + x\,dv) = 0$$
$$v^2\,dx + v\,dx + x\,dv - v^2\,dx - vx\,dv = 0$$
$$v\,dx + (x - vx)\,dv = 0$$
$$v\,dx + (1 - v)x\,dv = 0$$

Paso 4 - Se continua la resolución por método de variables separables

$$v\,dx + (1-v)x\,dv = 0$$

En este punto, se ensaya el procedimiento de Variables Separables:

$$v\,dx = (v-1)x\,dv$$

$$\frac{dx}{x} = \left(1 - \frac{1}{v}\right) dv$$

Luego, se puede tomar integrales de ambos lados:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{v}\right) dv$$

Entonces: $\ln x = v - \ln v + C$.

Es necesario reemplazar nuevamente para volver a trabajar con $y(x)$:

$$\ln x + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + C \quad \rightarrow \ln\left(x \cdot \frac{y}{x}\right) = \ln y = \frac{y}{x} + C$$

Por lo tanto, la solución general es: $\boxed{y = e^{\frac{y}{x}+C} = k\,e^{\frac{y}{x}}}$

III. ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1º ORDEN LINEALES

$$F(x;y;y') = 0 \rightarrow métodos\ algebraicos \rightarrow \boldsymbol{\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)}$$

$q(x) = 0$ *incompleta u homogénea .Se transforma en v.s.*
$q(x) \neq 0$ *no homogénea (idem para las de 2 órden)*
$q(x) = k \neq 0$ *se transforma en v.s.*

Resolución de EDO lineales completas/no homogéneas

Si p y q son contínuas ➡ existe solución y es única

Se puede resolver al multiplicar ambos lados de la ecuación por una función adecuada $\boldsymbol{\mu(x)}$ llamada *factor integrante*. Se intenta hallar $\boldsymbol{\mu}$ de modo que el lado izquierdo de la ecuación , cuando se multiplique por $\boldsymbol{\mu(x)}$, se convierta en la derivada del producto $\boldsymbol{\mu(x)}$ *y* :

$$\mu(x)\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = \frac{d[\mu(x)y]}{dx}$$

Si se puede hallar tal función μ, entonces la ecuación se convierte en $\dfrac{d[\mu(x)y]}{dx} = \mu(x)q(x)$

Paso 1- Aplicamos un factor integrante $\boldsymbol{\mu(x)}$ a ambos miembros de la ecuación y obtenemos una ecuación en v.s.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Utilizamos un factor integrante: $\boldsymbol{\mu(x) \neq 0}$ →

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$$

↓

$$\mu(x)\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = \frac{d[\mu(x)y]}{dx}$$

↓

$$(*) \qquad \frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \mu(x)q(x)$$

$$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \mu(x)q(x) = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y$$

$$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \frac{d\mu(x)}{dx}y + \mu(x)\frac{dy}{dx}$$

Igualando los términos:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y$$

$$d\frac{\mu(x)}{dx} = \mu(x).p(x)$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para μ

Paso 2 – Resolver por método de variables separables y hallar μ

$\forall\ (x; y) \neq (x; 0)$

$$d\frac{\mu(x)}{dx} = \mu(x).p(x) \longrightarrow$$ Ec.diferencial en variables separables $(x; \mu(x))$

$$\int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int p(x)dx$$

$$\ln|\mu(x)| = \int p(x)dx + \ln|c1|$$

$$|\mu(x)| = |c1|e^{\int p(x)dx} \longrightarrow$$ Solución general

Sc particular:

$$si\ c = 1 \qquad \mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Paso 3 – Reemplazar la función μ en la ecuación (*) del paso 1

Entonces: $\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \mu(x)q(x) \longrightarrow \frac{d[e^{\int p(x)dx}.y]}{dx} = e^{\int p(x)dx}.q(x) \longrightarrow$ Ec.en variables separables (x;y)

Paso 4 – Resolver en variables separables

$$\int d\left[e^{\int p(x)dx}.y\right] = \int e^{\int p(x)dx}.\text{q(x)}\,dx$$

$$e^{\int p(x)dx}.y = \int e^{\int p(x)dx}.\text{q(x)}\,dx + k$$

$$y_G = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}.\text{q(x)}\,dx + k\right]$$

$$y_G = \underbrace{e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}.q(x)dx}_{\text{Y completa}} + \underbrace{k.e^{-\int p(x)dx}}_{\text{Y Homogénea}}$$

$\forall\ (\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x};\boldsymbol{0})$

$$\frac{dy}{dx} = q(x) \qquad se\ transforma\ en\ v.s.$$

$$y = \int q(x)dx + k$$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

a) $y' + y = x$

Datos: $p(x) = 1 \quad q(x) = x \quad \forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad \exists \ solución \ única$

Paso 1- Aplicamos un factor integrante $\boldsymbol{\mu(x)}$ a ambos miembros de la ecuación y obtenemos una ecuación en v.s.

$\mu(x) \neq 0$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x).y = x.\mu(x)$$

(*) $$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = x.\mu(x)$$

$$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x).y = x.\mu(x)$$

$$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \frac{d\mu(x)}{dx}y + \mu(x)\frac{dy}{dx}$$

Igualando los términos:

$$y\frac{d\mu(x)}{dx} + \mu(x)\frac{dy}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x).y$$

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)$$

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = dx$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para μ

Paso 2 – Resolver por método de variables separables y hallar μ

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = dx \longrightarrow \int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int dx$$

$$\ln|\mu(x)| = x + \ln|c1|$$

$$\mu(x) = |c1|e^x$$

$s.p.$ $\quad c1 = 1$

$$|\mu(x)| = |c1|e^x \longrightarrow \boldsymbol{\mu(x) = e^x}$$

Paso 3 – Reemplazar la función μ en la ecuación (*) del paso 1

Entonces ,vuelvo a (*) y reemplazo

$$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = x.\mu(x) \longrightarrow \frac{d[e^x y]}{dx} = x.e^x$$

Paso 4 – Resolver en variables separables

$$\frac{d[e^x y]}{dx} = x.e^x$$

$\forall (x;y) \neq (x;0)$

$$\int d[e^x y] = \underbrace{\int x.e^x \, dx}_{I}$$

Resuelvo por partes

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = e^x \; dx \qquad v = e^x + c$$

$$I = xe^x - \int e^x dx$$

$$I = e^x(x-1) + c$$

$$e^x y = e^x(x-1) + k$$

$$\boldsymbol{y_G = x - 1 + ke^{-x}}$$

$\forall (x;y) = (x;0)$

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$\int dy = \int x \, dx \longrightarrow \boxed{y_G = \frac{x^2}{2} + k}$$

Dado el siguiente modelo dinámico de mercado:

$$\begin{cases} p' = Q^d - Q^s \ [Ecuación\ condicional] \\ Q^d = \alpha - \beta p \ [Ecuación\ de\ comportamiento] \\ Q^s = -\delta + \gamma p \ [Ecuación\ de\ comportamiento] \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que todos los parámetros son positivos y que $\beta > \gamma$, analizar la dinámica (la estabilidad) del precio a partir del comportamiento de la solución general.

En principio se debe armar la EDO a partir del modelo

$$\frac{dP}{dt} = \alpha - \beta P(t) - [-\delta + \gamma P(t)]$$

$$\frac{dP}{dt} = \alpha - \beta P(t) + \delta - \gamma P(t)$$

$$\frac{dP}{dt} + \beta P(t) + \gamma P(t) = \alpha + \delta$$

$$\frac{dP}{dt} + (\beta + \gamma) P(t) = \alpha + \delta$$

Esta es la ecuación por resolver

$$\frac{dP}{dt} + (\beta + \gamma)P(t) = \alpha + \delta$$

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dt} + p(t)P = q(t)}$$

$$p(t) = (\beta + \gamma) \wedge q(t) = (\alpha + \delta)$$

Paso 1- Aplicamos un factor integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$ a ambos miembros de la ecuación y obtenemos una ecuación en v.s.

$\mu(t) \neq 0$

$$\mu(t)\ \frac{dP}{dt} + \mu(t)(\beta + \gamma)P = \mu(t)(\alpha + \delta)$$

$$\frac{d[\mu(t)P]}{dt} = \mu(t)\frac{dP}{dt} + \mu(t)(\beta + \gamma)P = \mu(t)(\alpha + \delta)$$

$$\frac{d[\mu(t)P]}{dt} = \frac{d\mu(t)}{dt}\mathrm{P} + \mu(t)\frac{dP}{dt}$$

(*) $$\frac{d[\mu(t)P]}{dt} = \mu(t)(\alpha + \delta)$$

Igualando los términos:

$$\frac{d\mu(t)}{dt}\mathrm{P} + \mu(t)\frac{dP}{dt} = \mu(t)\frac{dP}{dt} + \mu(t)(\beta + \gamma)P$$

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)(\beta + \gamma)$$

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = (\beta + \gamma)dt$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para μ

Paso 2 – Resolver por método de variables separables y hallar μ

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = (\beta + \gamma)dt$$

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \int (\beta + \gamma)dt$$

$$ln|\mu(t)| = (\beta + \gamma)t + ln|C|$$

$$\mu(t) = Ce^{(\beta+\gamma)t} \qquad \text{Si } C = 1 \qquad \boxed{\mu(t) = e^{(\beta+\gamma)t}}$$

Paso 3 – Reemplazar la función μ en la ecuación (*) del paso 1

$$\frac{d[\mu(t)P]}{dt} = \mu(t)(\alpha + \delta)$$

$$\frac{d[e^{(\beta+\gamma)t}P]}{dt} = e^{(\beta+\gamma)t}(\alpha + \delta)$$

Paso 4 – Resolver en variables separables

$$\frac{d[e^{(\beta+\gamma)t}P]}{dt} = e^{(\beta+\gamma)t}(\alpha+\delta)$$

$$d[e^{(\beta+\gamma)t}P] = e^{(\beta+\gamma)t}(\alpha+\delta)dt$$

$\forall(t;P) \neq (t;0)$

$$\int d[e^{(\beta+\gamma)t}P] = \int e^{\overbrace{(\beta+\gamma)t}^{u}}(\alpha+\delta)dt$$

$$e^{(\beta+\gamma)t}P = \int \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)} e^{u} du$$

$$e^{(\beta+\gamma)t}P = \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)} e^{(\beta+\gamma)t} + k$$

Integramos por sustitución

$$u = (\beta+\gamma)t$$

$$du = (\beta+\gamma)dt$$

$$\frac{du}{(\beta+\gamma)} = dt$$

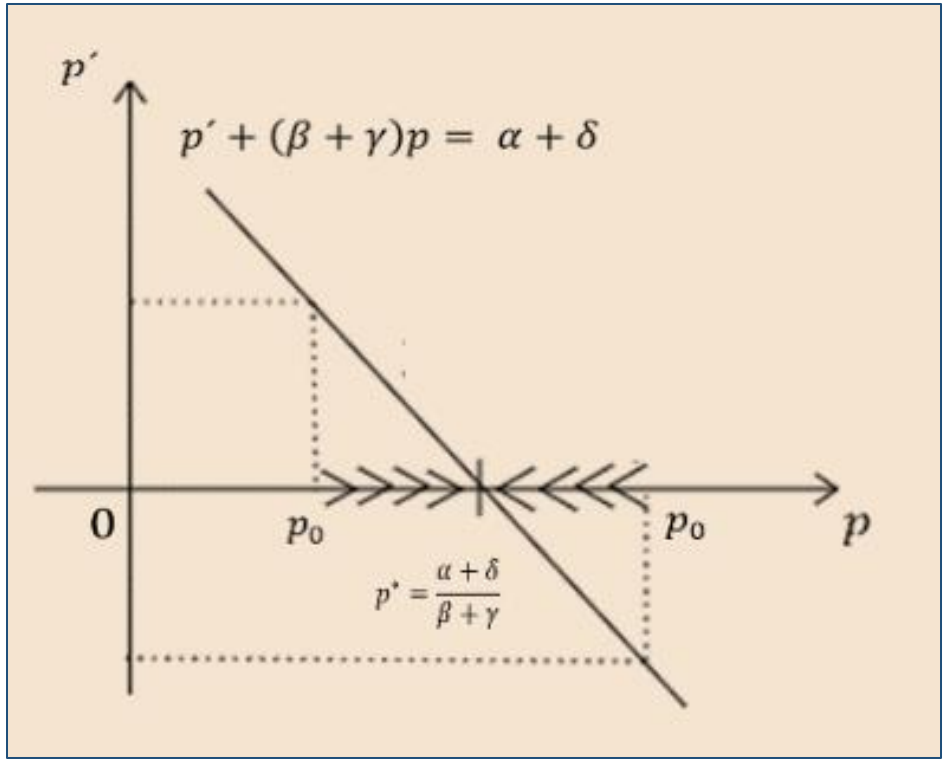
Solución general

$$P = Ke^{-(\beta+\gamma)t} + \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)}$$

Solución general $$P = Ke^{-(\beta+\gamma)t} + \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)}$$

En el largo plazo $$\lim_{t\to\infty} Ke^{-(\beta+\gamma)t} + \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)}$$

Suponiendo que todos los parámetros son positivos $r = -(\beta+\gamma)$ es negativo, lo que conforma una condición necesaria y suficiente para la estabilidad de la ecuación diferencial. Consecuentemente, la solución general, tiende a la solución de equilibrio a medida que el tiempo tiende a infinito.



Solución particular para $p(0) = p_0$

$$p_g = \left[p_0 - \frac{\alpha+\delta}{\beta+\gamma}\right] e^{-(\beta+\gamma)t} + \frac{\alpha+\delta}{\beta+\gamma}$$

Ajuste al precio de equilibrio

Precio de equilibrio

Ejercicios del Trabajo práctico VI

Ejercicios del libro : Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 15

Di Caro H., Gallego L. (1999). Análisis Matemático II con aplicaciones a la Economía. Ediciones Macchi; capítulo 10

Ejercicios Adicionales:

1-

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por separación de variables.

a) $\frac{dy}{dx} = k\ y$

b) $y' = \frac{y-a}{x-b}$, con a y b constantes

c) $y' = \frac{sen\ x}{sen\ y}$

d) $2xy\,(x+1)\frac{dy}{dx} = y^2 + 1$

e) $cos\,ec\ x\ \frac{dy}{dx} = y\ ln\ y$

f) $y' = a^{x+y}$, con $a > 0 \wedge a \neq 1$

g) $3e^x tg\ y\,dx + (2 - e^x)\,sec^2\ y\,dy = 0$

h) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y$ si $(x\,;y) = (2\,;4)$

2- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

a) $y' + y = x$

b) $x\,dy + (y - x\,e^{x})\,dx = 0$

c) $x\dfrac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

d) $(x-2)\,y' = y + 2\,(x-2)^3$

e) $\dfrac{dy}{dx} = x - \dfrac{2xy}{x^2+1}$

f) $y' = 3x^2 + \dfrac{3x^2 y}{x^3 - 1}$

g) $y' + 2y = e^{-2x}$, si $\begin{cases} \text{a)}\,(x\,;y) = (0\,;0) \\ \text{b)}\,(x\,;y) = (0\,;1) \end{cases}$

h) $\dfrac{dy}{dx} + y\,tg\,x = cos\,x$

i) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} + x^2 e^{x}$ si $f(1) = 0$

j) $y' + \dfrac{cos\,x}{1 - sen\,x}\,y = 1 - sen\,x$

k) $x\,y' = y + x\,ln\,x$

l) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{1+x^2} + x^2 + 1$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas.

a) $(3xy^2 + x^3)\,dx - 2x^2 y\,dy = 0$

b) $y' = -\dfrac{xy - y^2}{x^2}$

c) $(y^2 + xy + 4x^2)\,dx - x^2\,dy = 0$

d) $\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx - x\,dy = 0$

3- e) $y^2 + x^2\ \dfrac{dy}{dx} = xy\,\dfrac{dy}{dx}$, si $\begin{cases} \text{a)}\,(x\,;y) = (1\,;1) \\ \text{b)}\,(x\,;y) = (2\,;1) \end{cases}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$

g) $x^2\,dx + 2xy\,dy = -\,y^2\,dx$, si $\begin{cases} \text{a)}\,(x\,;y) = (1;2) \\ \text{b)}\,(x\,;y) = (1;0) \end{cases}$

h) $\left(x\,e^{y/x} + y\,e^{y/x} + x\right)dx - x\,e^{y/x}\,dy = 0$

4- La relación entre el costo de operar un almacén de depósito y el número de litros de aceite almacenados en dicho depósito está dado por $\frac{dy}{dx} = k\,x + a$, donde y es el costo operativo mensual y x es la cantidad de litros de aceite almacenado. Si el costo fijo mensual es y_0, encuentre $y = f(x)$.

5- La demanda de un bien por unidad de tiempo está dada por $x = a\,p + b$, y la oferta $y = \alpha\,p + \beta$ siendo p el precio. Si hay un exceso en la demanda sobre la oferta en cualquier período, el precio cambia para disminuir dicho exceso en una razón proporcional al exceso. Encuentre la función $p = f(t)$ (precio en función del tiempo) si $p_0 = f(0)$. Demuestre que el precio tiende al valor de equilibrio $\bar{p} = \frac{b+\beta}{\alpha - a}$.

Respuestas ejercicios adicionales

1

a) $y = C\,e^{kx}$ **b)** $y = a + C\,(x-b)$

c) $cos\,x - cos\,y = C$ **d)** $y^2 + 1 = \dfrac{C\,x}{x+1}$

e) $ln\,y = C\,e^{-cos\,x}$ **f)** $a^x + a^{-y} = C$

g) $tg\,y = C\,(2 - e^x)^3$

h) Tiene dos soluciones particulares: $y_1 = \dfrac{1}{4}(x+2)^2$ $y_2 = \dfrac{1}{4}(x-6)^2$

2-

a) $y = (x-1) + C\,e^{-x}$ **b)** $y = \dfrac{e^x}{x}(x-1) + \dfrac{C}{x}$

c) $y = \dfrac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\,ln\,x + C\,x$ **d)** $y = (x-2)^3 + C\,(x-2)$

e) $y = \dfrac{x^2+1}{4} + \dfrac{C}{x^2+1}$ **f)** $y = (x^3-1)\left(ln\,(x^3-1) + C\right)$

g) Si $\begin{cases} \text{a)}\,(x\,;y) = (0\,;0) \;:\; y = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-2x}) \\ \text{b)}\,(x\,;y) = (0\,;1) \;:\; y = (x+1)\,e^{-2x} \end{cases}$ **h)** $y = (x + C)\,cos\,x$

i) $y = x^2\,(e^x - e)$ **j)** $y = (x + C)\,(1 - sen\,x)$

k) $y = \dfrac{x}{2}(ln\,x)^2 + C\,x$ **l)** $y = (1 + x^2)\,(x + C)$

3-

a) $C\,(x^2+y^2)=x^3$

b) $y=2x+C\,x^2 y$

c) $C^2\,x^2=e^{arctg\,(y/2x)}$

d) $C\,x=e^{arcsen\,(y/x)}$

e)
$$\begin{cases} \text{a) No existe solución} \\ \text{b) } y=e^{(y/x)-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

f) $C\sqrt{x^2+y^2}=e^{arctg\,(y/x)}$

g)
$$\begin{cases} \text{a) } x\,(x^2+3y^2)=13 \\ \text{b) No existe solución} \end{cases}$$

h) $C\,x=1+e^{y/x}$

4-

$$y=\frac{k\,x^2}{2}+a\,x+y_0$$

5-

$$\frac{dp}{dt}=-k\,(a-\alpha)\,(p-\overline{p}) \Rightarrow p=\overline{p}+(p_0-\overline{p})\,e^{-k\,(a-\alpha)\,t} \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} p=\overline{p}$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden
EDOs homogéneas

Material complementario

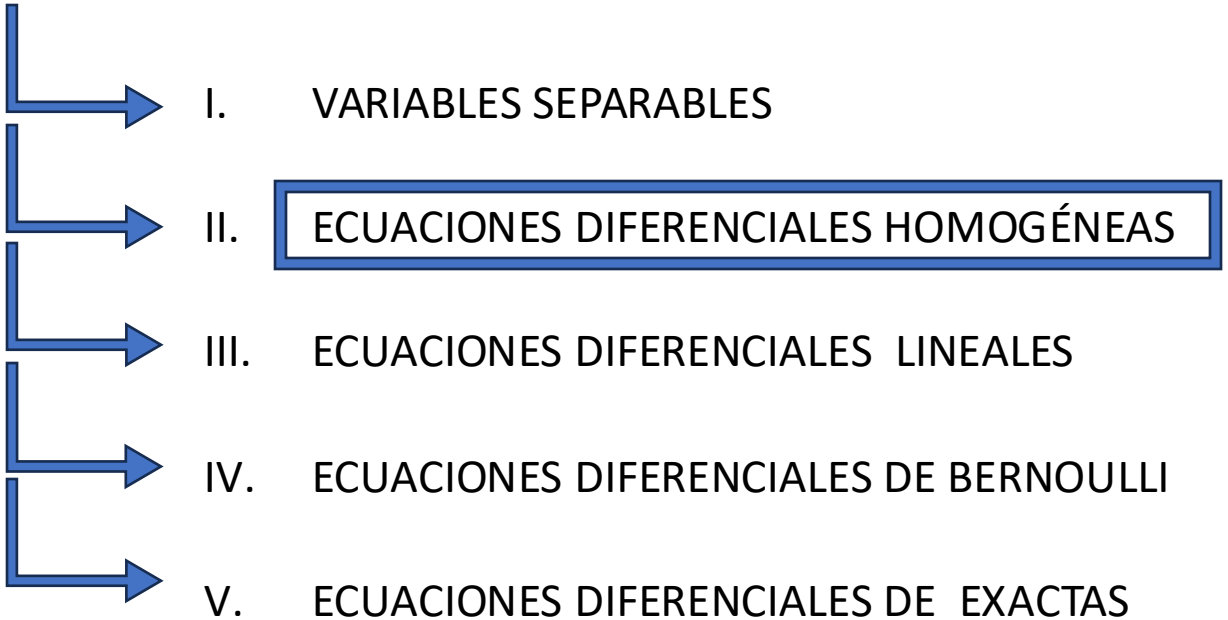
Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 15

Di Caro H., Gallego L. (1999). Análisis Matemático II con aplicaciones a la Economía. Ediciones Macchi; capítulo 10

Prof: Rita Beatriz Morrone

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 1° Orden



II. ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS

Diremos que una EDO de 1er orden es una ecuación de tipo homogénea si tiene la forma:

$$F(x; y; y') = 0 \rightarrow métodos\ algebraicos \rightarrow \ \boldsymbol{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$$

Dónde $P(x,y) \ \wedge Q(x,y)$ son funciones **HOMOGÉNEAS DEL MISMO GRADO**.

Para resolver este tipo de Ecuaciones Diferenciales:

i. Dividimos a toda la EDO por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de $P(x,y) \ \vee Q(x,y)$)

ii. Planteamos una sustitución conveniente: $v = y/x$

Forma funcional $\boldsymbol{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$

Paso 1- Dividimos a toda la EDO por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de $P(x,y) \vee Q(x,y)$)

$$\frac{\boldsymbol{P(x,y)}}{x^n}dx + \frac{\boldsymbol{Q(x,y)}}{x^n}dy = 0$$

Paso 2- Planteamos la sustitución : $v = y/x$, luego diferenciamos

$$v = \frac{y}{x} \rightarrow y = vx \qquad dy = d(vx) \rightarrow \quad \boldsymbol{dy = v\,dx + x\,dv}$$

Paso 3 – Se sustituye lo obtenido y por métodos algebraicos se transforma en variables separables

$$f1\left(\frac{y}{x}\right)dx + f2\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

$$f1\,(v)dx + f2(v)dy = 0$$

$$f1\,(v)dx + f2(v)(\boldsymbol{v\,dx + x\,dv}) = 0$$

$$f1\,(v)dx + vf2(v)dx + xf2(v)dv = 0$$

$$(f1\,(v) + vf2(v))dx + xf2(v)dv = 0 \longrightarrow$$

Se transformó a la forma funcional de variables separables

Paso 4 - Se continua la resolución por método de variables separables

$$(f1\,(v) + vf2(v))dx + xf2(v)dv = 0$$

$$f1\,(v) + vf2(v)dx = -xf2(v)dv$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-f2(v)}{f1(v) + vf2(v)}dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{-f2(v)}{f1(v) + vf2(v)}dv$$

$$ln|x| + ln|C| = F(v)$$

$$xC = e^{F(v)}$$

Solución general $\boldsymbol{xC = e^{F\left(\frac{y}{x}\right)}}$

Se separan las variables
Cada miembro de la ecuación queda constituído por una sola variable y su diferencial
Luego se integra y resuelve
Finalmente se revierte la sustitución hecha por las variables originales

Ejemplo 1

$$y^2 + (x^2 - xy)\, y' = 0$$

$y' = \frac{dy}{dx}$, entonces reacomodamos la expresión por métodos algebraicos:

$$y^2 + (x^2 - xy)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad y^2\, dx + (x^2 - xy)\, dy = 0$$

Forma funcional → $\boldsymbol{P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0}$

En esta ecuación: $P(x,y) = y^2$ ∧ $Q(x,y) = x^2 - xy$

Ambas son funciones homogéneas de grado 2.

Entonces haremos el procedimiento descripto para resolver:

Paso 1- Dividimos a toda la EDO por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de $P(x,y)$ ∨ $Q(x,y)$)

Paso 2- Planteamos la sustitución : $v = y/x$, luego diferenciamos

Paso 3 – Se sustituye lo obtenido y por métodos algebraicos se transforma en variables separables

Paso 4 - Se continua la resolución por método de variables separables

$$y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$$

Paso 1- Dividimos a toda la EDO por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de $P(x,y) \vee Q(x,y)$)

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2\,dx + \left(1 - \frac{y}{x}\right)\,dy = 0$$

Paso 2- Planteamos la sustitución : $v = y/x$, luego diferenciamos

$$\boldsymbol{v = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad dy = v\,dx + x\,dv}$$

Paso 3 – Se sustituye lo obtenido y por métodos algebraicos se transforma en variables separables

$$(v)^2\,dx + (1 - v)\,(v\,dx + x\,dv) = 0$$
$$v^2\,dx + v\,dx + x\,dv - v^2\,dx - vx\,dv = 0$$
$$v\,dx + (x - vx)\,dv = 0$$
$$v\,dx + (1 - v)x\,dv = 0$$

Paso 4 - Se continua la resolución por método de variables separables

$$v\,dx + (1-v)x\,dv = 0$$

En este punto, se ensaya el procedimiento de Variables Separables:

$$v\,dx = (v-1)x\,dv$$

$$\frac{dx}{x} = \left(1 - \frac{1}{v}\right) dv$$

Luego, se puede tomar integrales de ambos lados:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{v}\right) dv$$

Entonces: $\ln x = v - \ln v + C$.

Es necesario reemplazar nuevamente para volver a trabajar con $y(x)$:

$$\ln x + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} + C \quad \rightarrow \ln\left(x \cdot \frac{y}{x}\right) = \ln y = \frac{y}{x} + C$$

Por lo tanto, la solución general es: $\boxed{y = e^{\frac{y}{x}+C} = k\,e^{\frac{y}{x}}}$

Ejemplo 2

$$(3xy^2 + x^3)\,dx - 2x^2 y\,dy = 0$$

Forma funcional → $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

$$p(\lambda x;\lambda y) = 3x\lambda(y\lambda)^2 + (x\lambda)^3$$

$$p(\lambda x;\lambda y) = (\lambda)^3\,(3xy^2 + x^3)$$

$$Q(\lambda x;\lambda y) = -2(x\lambda)^2.\,y\lambda$$

$$Q(\lambda x;\lambda y) = (\lambda)^3(-2x^2.\,y)$$

En esta ecuación: $P(x,y) = (3xy^2 + x^3)$ ∧ $Q(x,y) = -2x^2.\,y$

Ambas son funciones homogéneas de grado 3.

Entonces haremos el procedimiento descripto para resolver:

Paso 1- Dividimos a toda la EDO por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de $P(x,y)$ ∨ $Q(x,y)$)

Paso 2- Planteamos la sustitución : $v = y/x$, luego diferenciamos

Paso 3 – Se sustituye lo obtenido y por métodos algebraicos se transforma en variables separables

Paso 4 - Se continua la resolución por método de variables separables

$$(3xy^2 + x^3)\,dx - 2x^2 y\,dy = 0$$

Paso 1- Dividimos a toda la EDO por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de $P(x,y)$ ∨ $Q(x,y)$)

$$\left(\frac{3xy^2 + x^3}{x^3}\right) dx + \left(-\frac{2x^2 y}{x^3}\right) dy = 0 \longrightarrow \left(\frac{3y^2}{x^2} + 1\right) dx + \left(-\frac{2y}{x}\right) dy = 0$$

Paso 2- Planteamos la sustitución : $v = y/x$, luego diferenciamos

$$\boldsymbol{v = \frac{y}{x}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{dy = v\,dx + x\,dv}$$

Paso 3 – Se sustituye lo obtenido y por métodos algebraicos se transforma en variables separables

$$(3(v)^2+1)\,dx + (-2v)\,(\boldsymbol{v\,dx + x\,dv}) = 0$$
$$(3v^2+1)dx - 2v^2\,dx - 2vx\,dv = 0$$
$$(v^2+1)dx - 2vx\,dv = 0$$

Paso 4 - Se continua la resolución por método de variables separables

$$(v^2+1)dx - 2vx\,dv = 0$$

En este punto, se ensaya el procedimiento de Variables Separables:

$$(v^2+1)dx = 2vx\,dv$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{2v}{(v^2+1)}\right) dv$$

Integrando por sustitución

$$u = v^2 + 1$$

$$du = 2v\,dv$$

Luego, se puede tomar integrales de ambos lados:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \left(\frac{2v}{(v^2+1)}\right) dv$$

Entonces: $\ln|x| = \ln|v^2+1| + \ln|C|$

Es necesario reemplazar nuevamente para volver a trabajar con $y(x)$:

$$\ln|x| = \ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right| + \ln|C| \longrightarrow \ln|x| = \ln\left|\frac{y^2+x^2}{x^2}\right| + \ln|C| \longrightarrow x = \left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)C$$

Por lo tanto, la solución general es: $x^3 = (y^2+x^2)C$

Ejemplo 3

$$x^2\,dx + 2xy\,dy = -y^2\,dx \qquad con\ (x;y) = (1;2)$$

Forma funcional $\longrightarrow$ $\boldsymbol{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$

Reacomodando a la forma funcional $(x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

$p(\lambda x;\lambda y) = (x\lambda)^2 + (y\lambda)^2$

$p(\lambda x;\lambda y) = (\lambda)^2\,(x^2 + y^2)$

$Q(\lambda x;\lambda y) = 2(x\lambda)(y\lambda)$

$Q(\lambda x;\lambda y) = (\lambda)^2(2xy)$

En esta ecuación: $P(x,y) = (x^2 + y^2) \quad \wedge \quad Q(x,y) = 2xy$

Ambas son funciones homogéneas de grado 2.

Entonces haremos el procedimiento descripto para resolver:

$$(x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0$$

Paso 1- Dividimos a toda la EDO por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de $P(x,y) \vee Q(x,y)$)

$$\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) dx + \left(\frac{2xy}{x^2}\right) dy = 0 \longrightarrow \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \left(\frac{2y}{x}\right) dy = 0$$

Paso 2- Planteamos la sustitución : $v = y/x$, luego diferenciamos

$$\boldsymbol{v = \frac{y}{x}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{dy = v\,dx + x\,dv}$$

Paso 3 – Se sustituye lo obtenido y por métodos algebraicos se transforma en variables separables

$$(1 + (v)^2)\,dx + (2v)\,(\boldsymbol{v\,dx + x\,dv}) = 0$$
$$(1 + (v)^2)\,dx + 2v^2\,dx + 2vx\,dv = 0$$
$$(1 + 3v^2)dx + 2vx\,dv = 0$$

Paso 4 - Se continua la resolución por método de variables separables

$$(1 + 3v^2)dx + 2vx\,dv = 0$$

En este punto, se ensaya el procedimiento de Variables Separables:

$$(1 + 3v^2)\,dx = -2vx\,dv$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{-2v}{(1 + 3v^2)}\right) dv$$

Integrando por sustitución

$$u = 1 + 3v^2$$

$$du = 6v\,dv$$

$$\frac{1}{6}du = v\,dv$$

Luego, se puede tomar integrales de ambos lados:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \left(\frac{-2v}{(1 + 3v^2)}\right) dv$$

Entonces: $\ln|x| = -\frac{1}{3}\ln|1 + 3v^2| + \ln|C|$

Es necesario reemplazar nuevamente para volver a trabajar con $y(x)$:

$$\ln|x| = -\frac{1}{3}\ln|1 + 3v^2| + \ln|C| \longrightarrow \ln|x| = -\frac{1}{3}\ln\left|1 + 3\frac{y^2}{x^2}\right| + \ln|C| \longrightarrow \ln|x| = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2 + 3y^2}{x^2}\right| + \ln|C|$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^2+3y^2}{x^2}\right| + \ln|C| \longrightarrow x = C\left(\frac{x^2+3y^2}{x^2}\right)^{-\frac{1}{3}} \longrightarrow C = x\left(\frac{x^2+3y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$C = x\frac{(x^2+3y^2)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \longrightarrow C = x^{\frac{1}{3}}(x^2+3y^2)^{\frac{1}{3}} \longrightarrow x^3+3xy^2 = C^3$$

Por lo tanto, la solución general es: $\boxed{x^3+3xy^2 = K}$

Reemplazando las condiciones iniciales $1^3+3*1*2^2 = 13$

Por lo tanto, la solución particular es: $\boxed{x^3+3xy^2 = 13}$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) Lineales de Orden 1

Material complementario

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 15.1 – 15.2 – 15.3

Prof. : Rita Beatriz Morrone

ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1º ORDEN LINEALES

$$F(x;y;y') = 0 \rightarrow métodos\ algebraicos \rightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$q(x) = 0$ *incompleta u homogénea .Se transforma en v.s.*
$q(x) \neq 0$ *no homogénea (idem para las de 2 órden)*
$q(x) = k \neq 0$ *se transforma en v.s.*

Resolución de EDO lineales completas/no homogéneas

Si p y q son contínuas ➡ existe solución y es única

Se puede resolver al multiplicar ambos lados de la ecuación por una función adecuada $\boldsymbol{\mu(x)}$ llamada *factor integrante*. Se intenta hallar $\boldsymbol{\mu}$ de modo que el lado izquierdo de la ecuación , cuando se multiplique por $\boldsymbol{\mu(x)}$, se convierta en la derivada del producto $\boldsymbol{\mu(x)}$ *y* :

$$\mu(x)\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = \frac{d[\mu(x)y]}{dx}$$

Si se puede hallar tal función μ, entonces la ecuación se convierte en $\dfrac{d[\mu(x)y]}{dx} = \mu(x)q(x)$

Paso 1- Aplicamos un factor integrante $\boldsymbol{\mu(x)}$ a ambos miembros de la ecuación y obtenemos una ecuación en v.s.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Utilizamos un factor integrante: $\boldsymbol{\mu(x) \neq 0}$ →

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$$

↓

$$\mu(x)\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = \frac{d[\mu(x)y]}{dx}$$

↓

$$(*) \qquad \frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \mu(x)q(x)$$

$$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \mu(x)q(x) = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y$$

$$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \frac{d\mu(x)}{dx}y + \mu(x)\frac{dy}{dx}$$

Igualando los términos:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y$$

$$d\frac{\mu(x)}{dx} = \mu(x).p(x)$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para μ

Paso 2 – Resolver por método de variables separables y hallar μ

$\forall\ (x; y) \neq (x; 0)$

$$d\frac{\mu(x)}{dx} = \mu(x).p(x) \longrightarrow$$ Ec.diferencial en variables separables $(x; \mu(x))$

$$\int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int p(x)dx$$

$$\ln|\mu(x)| = \int p(x)dx + \ln|c1|$$

$$|\mu(x)| = |c1|e^{\int p(x)dx} \longrightarrow$$ Solución general

Sc particular:

$$si\ c = 1 \qquad \mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Paso 3 – Reemplazar la función μ en la ecuación (*) del paso 1

Entonces: $\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \mu(x)q(x) \longrightarrow \frac{d[e^{\int p(x)dx}.y]}{dx} = e^{\int p(x)dx}.q(x) \longrightarrow$ Ec.en variables separables (x;y)

Paso 4 – Resolver en variables separables

$$\int d\left[e^{\int p(x)dx}.y\right] = \int e^{\int p(x)dx}.\text{q(x)}\,dx$$

$$e^{\int p(x)dx}.y = \int e^{\int p(x)dx}.\text{q(x)}\,dx + k$$

$$y_G = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}.\text{q(x)}\,dx + k\right]$$

$$y_G = \underbrace{e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}.q(x)dx}_{\text{Y completa}} + \underbrace{k.e^{-\int p(x)dx}}_{\text{Y Homogénea}}$$

$\forall\ (\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x};\boldsymbol{0})$

$$\frac{dy}{dx} = q(x) \qquad se\ transforma\ en\ v.s.$$

$$y = \int q(x)dx + k$$

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

a) $y' + y = x$

Datos: $p(x) = 1$ $q(x) = x$ $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2$ $\exists$ *solución única*

Paso 1- Aplicamos un factor integrante $\boldsymbol{\mu(x)}$ a ambos miembros de la ecuación y obtenemos una ecuación en v.s.

$\mu(x) \neq 0$

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x).y = x.\mu(x)$$

(*) $$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = x.\mu(x)$$

$$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x).y = x.\mu(x)$$

$$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = \frac{d\mu(x)}{dx}y + \mu(x)\frac{dy}{dx}$$

Igualando los términos:

$$y\frac{d\mu(x)}{dx} + \mu(x)\frac{dy}{dx} = \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x).y$$

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)$$

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = dx$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para μ

Paso 2 – Resolver por método de variables separables y hallar μ

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = dx \longrightarrow \int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int dx$$

$$\ln|\mu(x)| = x + \ln|c1|$$

$$\mu(x) = |c1|e^x$$

$s.p.$ $\quad c1 = 1$

$$|\mu(x)| = |c1|e^x \longrightarrow \boldsymbol{\mu(x) = e^x}$$

Paso 3 – Reemplazar la función μ en la ecuación (*) del paso 1

Entonces ,vuelvo a (*) y reemplazo

$$\frac{d[\mu(x)y]}{dx} = x.\mu(x) \longrightarrow \frac{d[e^x y]}{dx} = x.e^x$$

Paso 4 – Resolver en variables separables

$$\frac{d[e^x y]}{dx} = x.e^x$$

$\forall (x;y) \neq (x;0)$

$$\int d[e^x y] = \underbrace{\int x.e^x \, dx}_{I}$$

Resuelvo por partes

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = e^x \; dx \qquad v = e^x + c$$

$$I = xe^x - \int e^x dx$$

$$I = e^x(x-1) + c$$

$$e^x y = e^x(x-1) + k$$

$$\boldsymbol{y_G = x - 1 + ke^{-x}}$$

$\forall (x;y) = (x;0)$

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$\int dy = \int x \, dx \longrightarrow \boxed{y_G = \frac{x^2}{2} + k}$$

Dado el siguiente modelo dinámico de mercado:

$$\begin{cases} p' = Q^d - Q^s \ [Ecuación\ condicional] \\ Q^d = \alpha - \beta p \ [Ecuación\ de\ comportamiento] \\ Q^s = -\delta + \gamma p \ [Ecuación\ de\ comportamiento] \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que todos los parámetros son positivos y que $\beta > \gamma$, analizar la dinámica (la estabilidad) del precio a partir del comportamiento de la solución general.

En principio se debe armar la EDO a partir del modelo

$$\frac{dP}{dt} = \alpha - \beta P(t) - [-\delta + \gamma P(t)]$$

$$\frac{dP}{dt} = \alpha - \beta P(t) + \delta - \gamma P(t)$$

$$\frac{dP}{dt} + \beta P(t) + \gamma P(t) = \alpha + \delta$$

$$\frac{dP}{dt} + (\beta + \gamma) P(t) = \alpha + \delta$$

Esta es la ecuación por resolver

$$\frac{dP}{dt} + (\beta + \gamma)P(t) = \alpha + \delta \qquad \boldsymbol{\frac{dP}{dt} + p(t)P = q(t)}$$

$$p(t) = (\beta + \gamma) \wedge q(t) = (\alpha + \delta)$$

Paso 1- Aplicamos un factor integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$ a ambos miembros de la ecuación y obtenemos una ecuación en v.s.

$\mu(t) \neq 0$

$$\mu(t)\ \frac{dP}{dt} + \mu(t)(\beta + \gamma)P = \mu(t)(\alpha + \delta)$$

$$\frac{d[\mu(t)P]}{dt} = \mu(t)\frac{dP}{dt} + \mu(t)(\beta + \gamma)P = \mu(t)(\alpha + \delta)$$

$$\frac{d[\mu(t)P]}{dt} = \frac{d\mu(t)}{dt}\mathrm{P} + \mu(t)\frac{dP}{dt}$$

(*) $$\frac{d[\mu(t)P]}{dt} = \mu(t)(\alpha + \delta)$$

Igualando los términos:

$$\frac{d\mu(t)}{dt}\mathrm{P} + \mu(t)\frac{dP}{dt} = \mu(t)\frac{dP}{dt} + \mu(t)(\beta + \gamma)P$$

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)(\beta + \gamma)$$

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = (\beta + \gamma)dt$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para μ

Paso 2 – Resolver por método de variables separables y hallar μ

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = (\beta + \gamma)dt$$

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \int (\beta + \gamma)dt$$

$$ln|\mu(t)| = (\beta + \gamma)t + ln|C|$$

$$\mu(t) = Ce^{(\beta+\gamma)t} \qquad \text{Si } C = 1 \qquad \boxed{\mu(t) = e^{(\beta+\gamma)t}}$$

Paso 3 – Reemplazar la función μ en la ecuación (*) del paso 1

$$\frac{d[\mu(t)P]}{dt} = \mu(t)(\alpha + \delta)$$

$$\frac{d[e^{(\beta+\gamma)t}P]}{dt} = e^{(\beta+\gamma)t}(\alpha + \delta)$$

Paso 4 – Resolver en variables separables

$$\frac{d[e^{(\beta+\gamma)t}P]}{dt} = e^{(\beta+\gamma)t}(\alpha+\delta)$$

$$d[e^{(\beta+\gamma)t}P] = e^{(\beta+\gamma)t}(\alpha+\delta)dt$$

$\forall(t;P) \neq (t;0)$

$$\int d[e^{(\beta+\gamma)t}P] = \int e^{\overbrace{(\beta+\gamma)t}^{u}}(\alpha+\delta)dt$$

$$e^{(\beta+\gamma)t}P = \int \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)} e^{u} du$$

$$e^{(\beta+\gamma)t}P = \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)} e^{(\beta+\gamma)t} + k$$

Integramos por sustitución

$$\begin{cases} u = (\beta+\gamma)t \\ du = (\beta+\gamma)dt \\ \dfrac{du}{(\beta+\gamma)} = dt \end{cases}$$

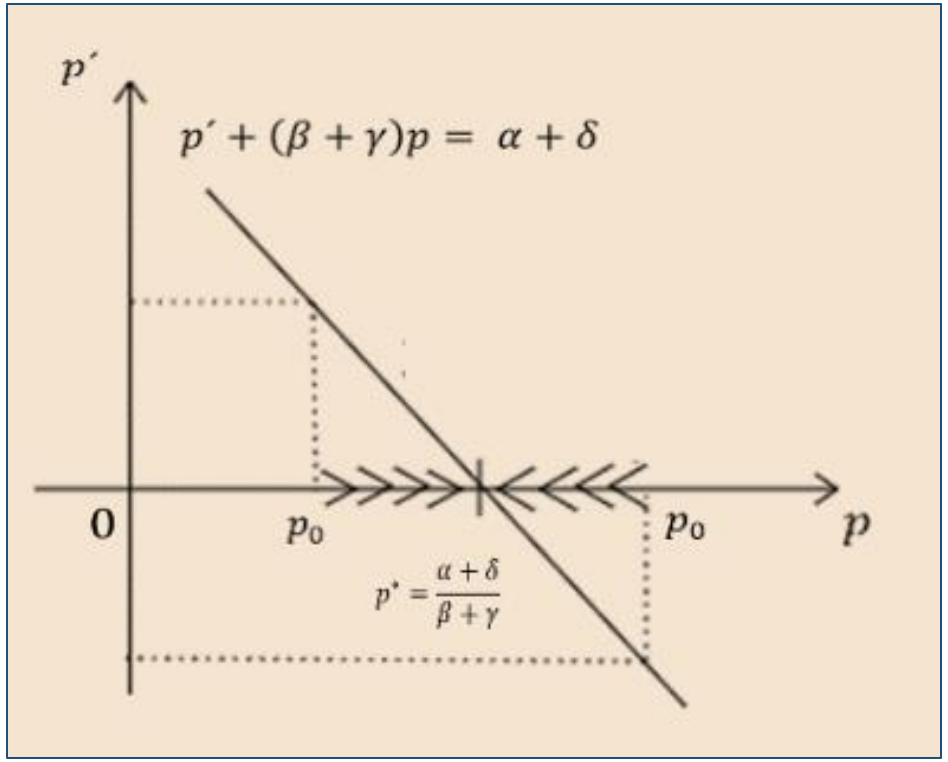
Solución general

$$P = Ke^{-(\beta+\gamma)t} + \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)}$$

Solución general $$P = Ke^{-(\beta+\gamma)t} + \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)}$$

En el largo plazo $$\lim_{t\to\infty} Ke^{-(\beta+\gamma)t} + \frac{(\alpha+\delta)}{(\beta+\gamma)}$$

Suponiendo que todos los parámetros son positivos $r = -(\beta+\gamma)$ es negativo, lo que conforma una condición necesaria y suficiente para la estabilidad de la ecuación diferencial. Consecuentemente, la solución general, tiende a la solución de equilibrio a medida que el tiempo tiende a infinito.



Solución particular para $p(0) = p_0$

$$p_g = \left[p_0 - \frac{\alpha+\delta}{\beta+\gamma}\right] e^{-(\beta+\gamma)t} + \frac{\alpha+\delta}{\beta+\gamma}$$

Ajuste al precio de equilibrio

Precio de equilibrio

En el caso de tener la siguiente estructura (solo si los coeficientes son constantes) se puede resolver de la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dt} + p(t)P = q(t)$$

$$\frac{dP}{dt} + (\beta + \gamma)P(t) = \alpha + \delta$$

Paso 1 – Hallar la solución de la ecuación homogénea asociada

$$\frac{dP}{dt} + (\beta + \gamma)P(t) = 0$$

Se ensaya una solución y se reemplaza en la ecuación homogénea

$$P_t^h = e^{rt}$$

$$P_t'^{\,h} = re^{rt}$$

$$re^{rt} + (\beta + \gamma)e^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(r + (\beta + \gamma)) = 0$$

$$\neq 0$$

Despejando r se obtiene la raíz

$$r = -(\beta + \gamma)$$

$$P_t^h = k\, e^{-(\beta+\gamma)t}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria – Método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{dP}{dt} + (\beta + \gamma)P(t) = \alpha + \delta$$

Sabiendo que $g(t) = (\alpha + \delta)$ es una constante
Se propone el siguiente ensayo de solución:

$$P_t^c = A$$

$$P_t'^{\,c} = 0$$

se reemplaza en la ecuación diferencial

$$0 + (\beta + \gamma)A = \alpha + \delta$$

Despejando A

$$A = \frac{(\alpha + \delta)}{(\beta + \gamma)}$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$P_t^g = k\, e^{-(\beta+\gamma)t} + \frac{(\alpha + \delta)}{(\beta + \gamma)}$$

Si se tiene condiciones iniciales se podría obtener la solución particular

Otro ejemplo:

$$2\frac{dP}{dt} + 12P(t) + 2e^t = 0 \quad con\ p(0) = \frac{6}{7}$$

Se debe re expresar $\frac{dP}{dt} + 6P(t) = -e^t$

Paso 1 – Hallar la solución de la ecuación homogénea asociada

$$\frac{dP}{dt} + 6P(t) = 0$$

Se ensaya una solución y se reemplaza en la ecuación homogénea

$P_t^h = e^{rt}$

$P_t'^{\,h} = re^{rt}$

$re^{rt} + 6\,e^{rt} = 0$

$e^{rt}(r + 6) = 0$

$\neq 0$

Despejando r se obtiene la raíz

$r = -6$

$$P_t^h = k\,e^{-6\,t}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria – Método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{dP}{dt} + 6P(t) = -e^t$$

Sabiendo que $g(t) = (\alpha + \delta)$ es una constante
Se propone el siguiente ensayo de solución:

$$P_t^c = Ae^{bt}$$

$$P_t'^{\,c} = bAe^{bt}$$

En este caso b=1 ya que no es raíz de la homogénea

se reemplaza en la ecuación diferencial

$$bAe^{bt} + 6Ae^{bt} = -e^t$$

Despejando A

$$Ae^{bt}(1+6) = -e^t \longrightarrow A = -\frac{1}{7}$$

$$P_t^c = -\frac{1}{7}e^t$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$P_t^g = k\,e^{-6t} - \frac{1}{7}e^t$$

Paso 4 – Hallar la solución particular

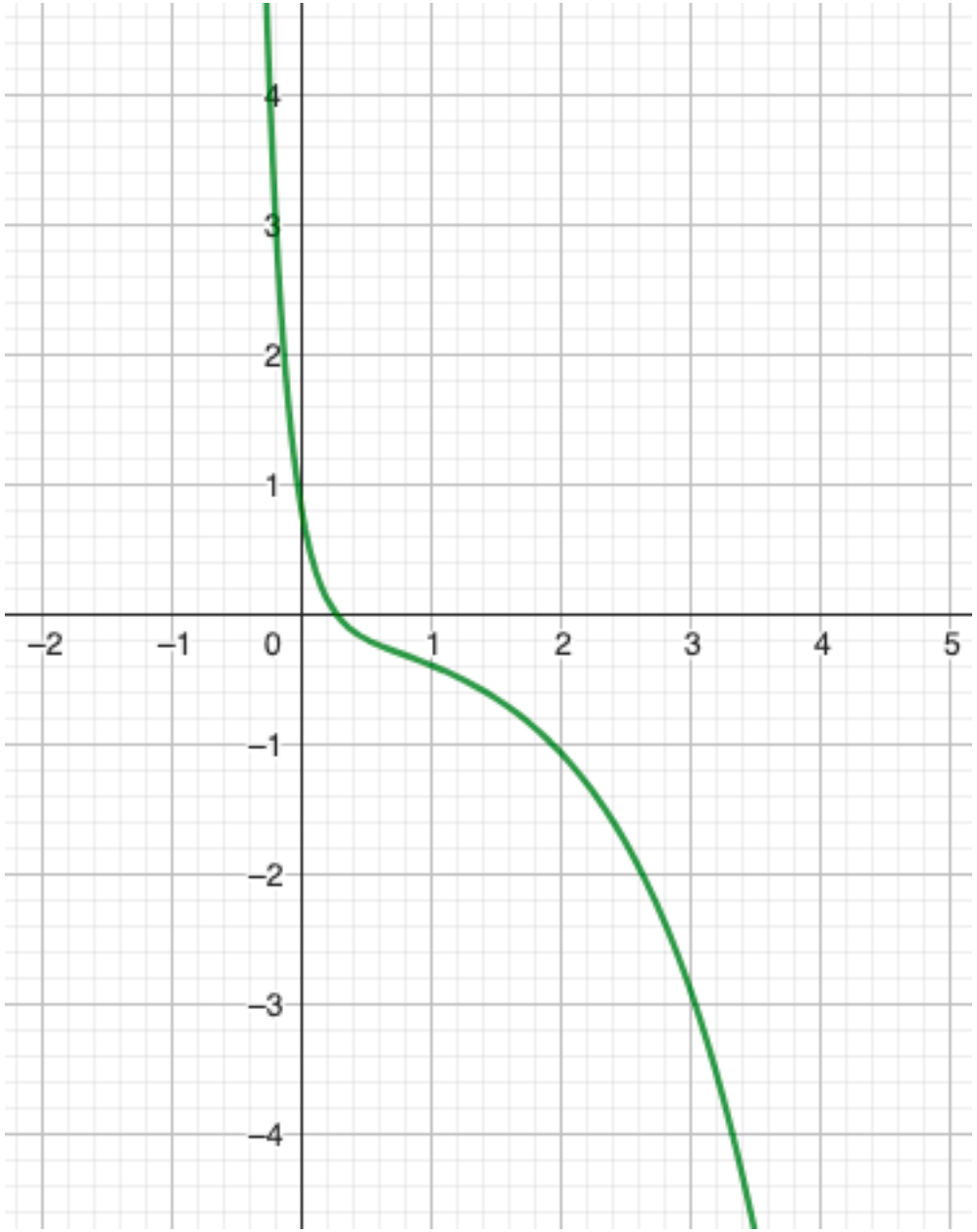
$$P_t^g = k\, e^{-6t} - \frac{1}{7} e^t$$

$con\ p(0) = \frac{6}{7}$

$$P(0) = k\, e^{-6*0} - \frac{1}{7} e^0$$

Despejando $K = 1$

$$P_t^P = e^{-6t} - \frac{1}{7} e^t$$



Ejemplo – EDO lineal con coeficiente variable

$$\frac{dy}{dt} + 3t^2 y = 0 \qquad \frac{dP}{dt} + p(t)P = q(t) \qquad p(t) = 3t^2 \wedge q(t) = 0$$

Paso 1- Aplicamos un factor integrante $\mu(t)$ a ambos miembros de la ecuación y obtenemos una ecuación en v.s.

$\mu(t) \neq 0$

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)3t^2 y = \mu(t)0$$

$$\frac{d[\mu(t)y]}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)3t^2 y = \mu(t)0$$

$$\frac{d[\mu(t)y]}{dt} = \frac{d\mu(t)}{dt}\mathrm{y} + \mu(t)\frac{dy}{dt}$$

(*) $\dfrac{d[\mu(t)y]}{dt} = \mu(t)0$

Igualando los términos:

$$\frac{d\mu(t)}{dt}\mathrm{y} + \mu(t)\frac{dy}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)3t^2 y$$

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)3t^2$$

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = 3t^2 dt$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para μ

Paso 2 – Resolver por método de variables separables y hallar μ

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = 3t^2 dt$$

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \int 3t^2 dt$$

$$ln|\mu(t)| = t^3 + ln|C|$$

$$\mu(t) = Ce^{t^3}$$ Si C =1 $$\boxed{\mu(t) = e^{t^3}}$$

Paso 3 – Reemplazar la función μ en la ecuación (*) del paso 1

$$\frac{d[\mu(t)y]}{dt} = \mu(t)0 \longrightarrow \frac{d[e^{t^3}y]}{dt} = e^{t^3}0$$

Paso 4 – Resolver en variables separables

$$\frac{d[e^{t^3}y]}{dt} = e^{t^3}0$$

$$d[e^{t^3}y] = 0dt$$

$\forall(t;y) \neq (t;0)$

$$\int d[e^{t^3}y] = \int 0\, dt$$

$$[e^{t^3}y] = k$$

$$y = ke^{-t^3}$$

Solución general

$$\boxed{y = ke^{-t^3}}$$

Ejemplo – EDO lineal con coeficiente y término variable

$$\frac{dy}{dt} + 4ty = 4t \qquad \frac{dP}{dt} + p(t)P = q(t) \qquad p(t) = 4t \ \wedge q(t) = 4t$$

Paso 1- Aplicamos un factor integrante $\mu(t)$ a ambos miembros de la ecuación y obtenemos una ecuación en v.s.

$\mu(t) \neq 0$

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)4ty = \mu(t)4t$$

$$\frac{d[\mu(t)y]}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)4ty = \mu(t)4t$$

$$\frac{d[\mu(t)y]}{dt} = \frac{d\mu(t)}{dt}\mathrm{y} + \mu(t)\frac{dy}{dt}$$

(*) $\dfrac{d[\mu(t)y]}{dt} = \mu(t)4t$

Igualando los términos:

$$\frac{d\mu(t)}{dt}\mathrm{y} + \mu(t)\frac{dy}{dt} = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)4ty$$

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)4t$$

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = 4t\,dt$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para μ

Paso 2 – Resolver por método de variables separables y hallar μ

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = 4t\,dt$$

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = \int 4t\,dt$$

$$ln|\mu(t)| = 2t^2 + ln|C|$$

$$\mu(t) = Ce^{2t^2}$$ Si C =1 $$\boxed{\mu(t) = e^{2t^2}}$$

Paso 3 – Reemplazar la función μ en la ecuación (*) del paso 1

$$\frac{d[\mu(t)y]}{dt} = \mu(t)4t \longrightarrow \frac{d[e^{2t^2}y]}{dt} = e^{2t^2}4t$$

Paso 4 – Resolver en variables separables

$$\frac{d[e^{2t^2}y]}{dt} = e^{2t^2}4t$$

$$d[e^{2t^2}y] = e^{2t^2}4t\,dt$$

$\forall(t;y) \neq (t;0)$

$$\int d[e^{2t^2}y] = \int e^{2t^2}4t\,dt$$

$$[e^{2t^2}y] = e^{2t^2} + \mathrm{k}$$

Integramos por sustitución

$u = 2t^2 \quad du = 4t\,dt$

Solución general

$$\boxed{y = ke^{-2t^2} + 1}$$

EDOs reducibles a lineales y exactas

Material complementario

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 15

Di Caro H., Gallego L. (1999). Análisis Matemático II con aplicaciones a la Economía. Ediciones Macchi; capítulo 10

Prof.: Rita Beatriz Morrone

IV. ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1º ORDEN BERNOULLI
(Ecuaciones diferenciales reducibles a lineales)

Una Ecuación Diferencial de 1º orden es BERNOULLI si su representación genérica es:

$$F[x;y;y'] = 0 \rightarrow métodos\ algebraicos \rightarrow \boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n} \qquad \forall n \neq 0 \wedge n \neq 1$$

$$\boldsymbol{y' + P(x) \cdot y = Q(x)\ y^n}$$

Dónde $P(x)\ \wedge\ Q(x)$ son funciones continuas de x.

En particular, si $n = 0$ entonces la ecuación se resuelve por LINEAL.

Si en cambio, $n = 1$ se resuelve como Variables Separables. Es decir,

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)\ y$$

$$\frac{dy}{dx} + [P(x) - Q(x)] \cdot y = 0 \quad \rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int [P(x) - Q(x)] \cdot dx \quad \rightarrow \quad y + C = e^{-\int [P(x) - Q(x)] \cdot dx}$$

Si $n \neq 0\ \wedge n \neq 1$ debemos aplicar un Método de Resolución basado en una sustitución conveniente.

Método de resolución

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)\, y^n$$

Paso 1 – Dividir toda la expresión por y^n

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x) \cdot y}{y^n} = \frac{Q(x)\, y^n}{y^n} \quad \longrightarrow \quad y^{-n}\, y' + P(x) \cdot y^{1-n} = Q(x)$$

Paso 2 – Plantear una sustitución adecuada → $z = y^{1-n}$ luego, obtener la derivada de la sustitución

$$\boldsymbol{z = y^{1-n}} \qquad \boldsymbol{z' = (1-n)\, y^{-n} \cdot y'} \qquad \boldsymbol{\frac{z'}{1-n} = y^{-n} \cdot y'}$$

Paso 3 – Reemplazar lo obtenido en la expresión original

$$\frac{\boldsymbol{z'}}{\boldsymbol{1-n}} + P(x)\, \boldsymbol{z} = Q(x)$$

$$\therefore z' + (1-n)P(x)\, z = (1-n)Q(x)$$

¡Que resulta ser una ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL!

Paso 4 – Resolver por método de ecuaciones diferenciales lineales

Ejemplo

$$y' - \frac{1}{x} \cdot y = \frac{3}{x} y^3$$

Paso 1 – Dividir toda la expresión por y^n

$$\frac{y'}{y^3} - \frac{1.y}{xy^3} = \frac{3y^3}{xy^3} \quad \rightarrow \quad y^{-3}\, y' + \frac{1}{x} \cdot y^{-2} = \frac{3}{x}$$

Paso 2 – Plantear una sustitución adecuada → $z = y^{1-n}$ luego, obtener la derivada de la sustitución

$$z = y^{-2} \qquad z' = -2\, y^{-3} \cdot y' \qquad \frac{z'}{-2} = y^{-3} \cdot y'$$

Paso 3 – Reemplazar lo obtenido en la expresión original

$$y^{-3}\, y' + \frac{1}{x} \cdot y^{-2} = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{z'}{-2} + \frac{1}{x} \cdot z = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{2}{x}\, z = -\frac{6}{x}$$

¡Que resulta ser una Ecuación Diferencial LINEAL!

$$z' - \frac{2}{x} z = -\frac{6}{x}$$

Paso 4 – Resolver por método de ecuaciones diferenciales lineales

Paso 1- Aplicamos un factor integrante $\boldsymbol{\mu(x)}$ a ambos miembros de la ecuación y obtenemos una ecuación en v.s.

Utilizamos un factor integrante: $\boldsymbol{\mu(x) \neq 0}$ ⟹ $$\boldsymbol{\mu(x)} \frac{dz}{dx} - \boldsymbol{\mu(x)} \frac{2}{x} z = -\frac{\boldsymbol{6\mu(x)}}{x}$$

$$\boldsymbol{\mu(x)} \frac{dz}{dx} - \boldsymbol{\mu(x)} \frac{2}{x} z = -\frac{\boldsymbol{6\mu(x)}}{x}$$

(*) $$\frac{d[\mu(x)z]}{dx} = -\frac{\boldsymbol{6\mu(x)}}{x}$$

$$\frac{d[\mu(x)z]}{dx} = -\frac{\boldsymbol{6\mu(x)}}{x} = \boldsymbol{\mu(x)} \frac{dz}{dx} - \boldsymbol{\mu(x)} \frac{2}{x} z$$

$$\frac{d[\mu(x)z]}{dx} = \frac{d\mu(x)}{dx} z + \mu(x) \frac{dz}{dx}$$

Igualando los términos: $$\boldsymbol{\mu(x)} \frac{dz}{dx} - \boldsymbol{\mu(x)} \frac{2}{x} z = \frac{d\mu(x)}{dx} z + \mu(x) \frac{dz}{dx}$$ ⟹

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = -\boldsymbol{\mu(x)} \frac{2}{x}$$

$$\frac{d\mu(x)}{\boldsymbol{\mu(x)}} = -\frac{2}{x} \boldsymbol{dx}$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para μ

Paso 2 – Resolver por método de variables separables y hallar μ

$$\frac{d\mu(x)}{\boldsymbol{\mu(x)}} = -\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}$$

$$\int \frac{d\mu(x)}{\boldsymbol{\mu(x)}} = \int -\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}$$

$$ln|\mu(x)| = -2ln\,|x| + ln|C|$$

$$\mu(x) = Cx^{-2} \qquad \text{Si } C = 1 \qquad \boxed{\mu(x) = x^{-2}}$$

Paso 3 – Reemplazar la función μ en la ecuación (*) del paso 1

$$\frac{d[\mu(x)z]}{dx} = -\frac{\boldsymbol{6\mu(x)}}{\boldsymbol{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d[x^{-2}z]}{dx} = -\frac{\boldsymbol{6x^{-2}}}{\boldsymbol{x}}$$

Paso 4 – Resolver en variables separables

$$d[x^{-2}z] = -\frac{\boldsymbol{6x^{-2}}}{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{dx}$$

$\forall(x;z) \neq (x;0)$

$$\int d[x^{-2}z] = \int -\frac{\boldsymbol{6x^{-2}}}{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{dx}$$

$$x^{-2}z = -6\int x^{-3}\boldsymbol{dx}$$

$$x^{-2}z = \frac{6}{2}x^{-2} + k$$

$$\boxed{z = 3 + kx^2}$$

Como: $\boldsymbol{y^{-2} = z}$

$$\boldsymbol{y^{-2} = 3 + kx^2} \quad \textbf{SOLUCION GENERAL}$$

Ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = y + xy^5$$

$$F[x; y; y'] = 0 \rightarrow métodos\ algebraicos \rightarrow \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

$$\forall n \neq 0 \wedge n \neq 1$$

$$luego\ de\ corroborar\ que\ \forall (x; y) \in \mathbb{R}^2\ \exists\ sol\ unica$$

Paso 1 – Dividir toda la expresión por y^n

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^5 \qquad \forall (x; y) \neq (x; 0)$$

$$\frac{y'}{y^5} - \frac{y}{y^5} = \frac{xy^5}{y^5}$$

$$\rightarrow \quad y^{-5}\frac{dy}{dx} - y^{-4} = x$$

Paso 2 – Plantear una sustitución adecuada $\rightarrow z = y^{1-n}$ luego, obtener la derivada de la sustitución

$$z = y^{-4} \longrightarrow z' = -4y^{-5}\frac{dy}{dx} \longrightarrow \frac{z'}{-4} = y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

Paso 3 – Reemplazar lo obtenido en la expresión original

$$y^{-5}\frac{dy}{dx} - y^{-4} = x \longrightarrow -\frac{1}{4}\frac{dz}{dx} - z = x \longrightarrow \frac{dz}{dx} + 4z = -4x$$

ahora tengo una EDO eq lineal en $(x; z)$

Paso 4 – Resolver por método de ecuaciones diferenciales lineales

Paso 1- Aplicamos un factor integrante $\boldsymbol{\mu(x)}$ a ambos miembros de la ecuación y obtenemos una ecuación en v.s.

Utilizamos un factor integrante: $\boldsymbol{\mu(x) \neq 0}$

$$\mu(x)\frac{dz}{dx} + 4\mu(x)z = -4x.\mu(x)$$

$$(*) \qquad \frac{d[\mu(x)z]}{dx} = -4x.\mu(x)$$

$$\frac{d[\mu(x)z]}{dx} = \mu(x)\frac{dz}{dx} + 4\mu(x)z = -4x.\mu(x)$$

$$\frac{d[\mu(x)z]}{dx} = \frac{d\mu(x)}{dx}z + \mu(x)\frac{dz}{dx}$$

Igualando los términos: $\frac{d\mu(x)}{dx}z + \mu(x)\frac{dz}{dx} = \mu(x)\frac{dz}{dx} + 4\mu(x)z$

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = 4\mu(x)$$

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = 4\mu(x)dx$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para μ

Paso 2 – Resolver por método de variables separables y hallar μ

$$\int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int 4dx$$

$$\ln|\mu(x)| = 4x + ln|c|$$

$$|\mu(x)| = e^{4x}|c1|$$

$$c1 = 1 \qquad \mu(x) = e^{4x}$$

Paso 3 – Reemplazar la función μ en la ecuación (*) del paso 1

$$\frac{d[\mu(x)z]}{dx} = -4x.\mu(x) \qquad (*)$$

$$\frac{d[e^{4x}z]}{dx} = -4x.e^{4x} \longrightarrow d[e^{4x}z] = -4x.e^{4x}dx$$

Paso 4 – Resolver en variables separables

$$\int d[e^{4x}z] = -4\int xe^{4x}dx$$

$$u = x \qquad du = dx$$

$$dv = e^{4x}dx \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$$

$$I = \frac{x}{4}e^{4x} - \frac{1}{4}\int e^{4x}dx$$

$$I = \frac{xe^{4X}}{4} - \frac{1}{16}e^{4x} + K$$

$$e^{4x}z = -xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + k$$

Sc.general en (x;z)

$$\Rightarrow \quad z = -x + \frac{1}{4} + ke^{-4x}$$

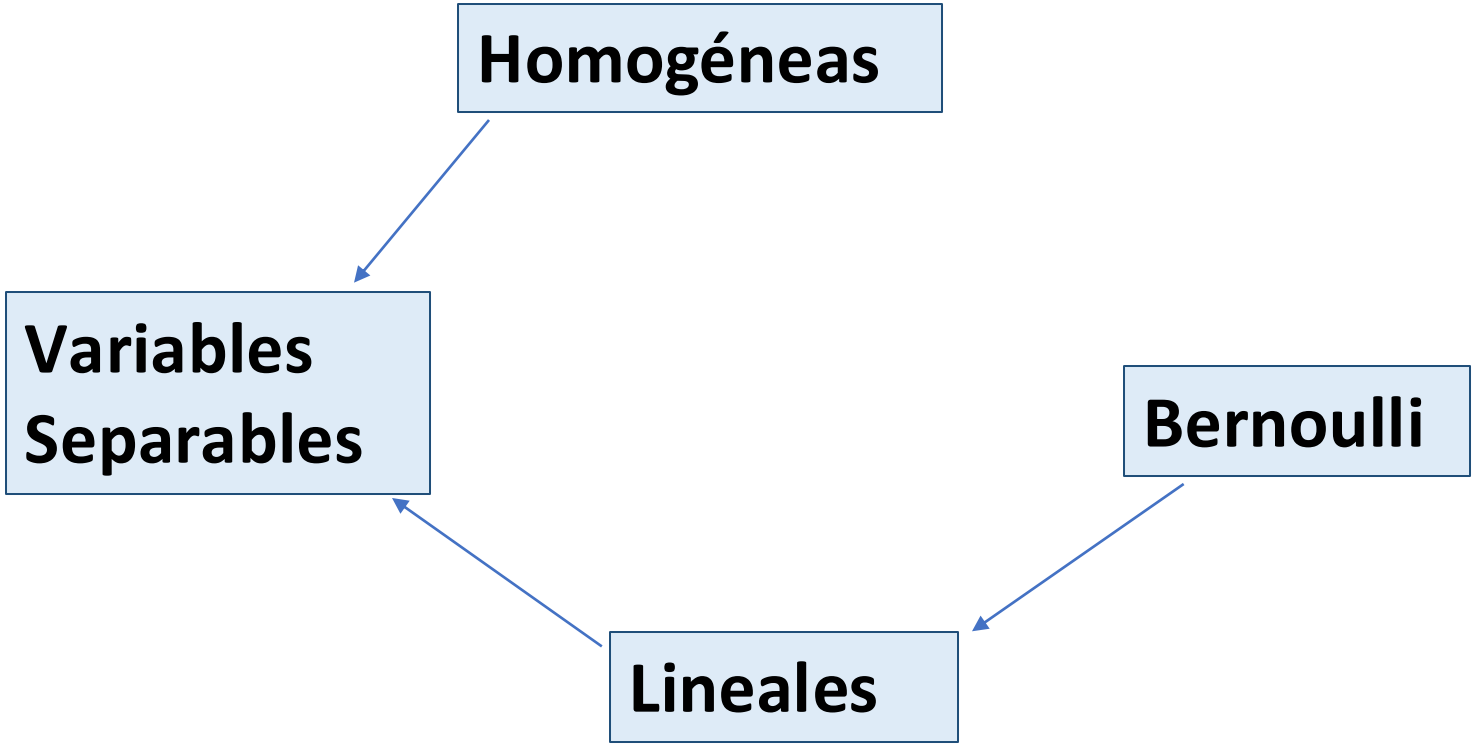
Dado que $z = y^{-4}$, se reemplaza nuevamente

$$y^{-4} = -x + \frac{1}{4} + ke^{-4x}$$

SOLUCION GENERAL

$$\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{4} - x + ke^{-4x}\right)^{-\frac{1}{4}}}$$

Relación entre los métodos de resolución



- Este es el recorrido que se hará para cada uno de los métodos vistos. Siempre se buscará llegar a Variables Separables.

V. ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1º ORDEN EXACTAS

Una Ecuación diferencial es EXACTA si su representación genérica es:

$$F[x; y; y'] = 0 \rightarrow métodos\ algebraicos \rightarrow \boldsymbol{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$$

Y se cumple la condición de simetría: $\boldsymbol{P'_y = Q'_x}$

Si se cumple la condición de simetría: $P'_y = Q'_x$

Existe una función $U(x,y)$ cuyo $\boldsymbol{dU = P(x,y)\cdot dx + Q(x,y)\cdot dy}$

$$dU(x,y) = U'_x\,dx + U'_y\,dy \quad \rightarrow \quad U'_x = P(x,y) \ \wedge U'_y = Q(x,y)$$

Cómo $dU(x,y) = 0 \rightarrow \quad \boldsymbol{U(x,y) = C}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \boldsymbol{P(x,y)} \rightarrow & \int \boldsymbol{dU = \int P(x,y)\,dx = F(x,y) + \alpha(y)} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \boldsymbol{Q(x,y)} \rightarrow & \int \boldsymbol{dU = \int Q(x,y)\,dy = F(x,y) + \beta(x)} \end{cases} \rightarrow \boxed{\boldsymbol{U(x,y) = F(x,y) + \alpha(y) + \beta(x) = C}}$$

Ejemplo

$$(2x^3 + y) \cdot dx + (x + 2y^2) \cdot dy = 0$$

Paso 1 – Verificar que se cumple la condición de simetría

$$P'_y = Q'_x \quad \rightarrow \quad 1 = 1 \quad ¡\mathcal{OK}!$$

Paso 2 – Plantear $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ e integrar ambas expresiones

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = (2x^3 + y) \rightarrow & \int dU = \int (2x^3 + y)dx = 2\frac{x^4}{4} + xy = \frac{x^4}{2} + xy \\ \frac{\partial U}{\partial y} = (x + 2y^2) \rightarrow & \int dU = \int (x + 2y^2)dy = xy + 2\frac{y^3}{3} \end{cases}$$

Paso 3 – Buscar $U(x, y) = C$

$$U(x, y) = F(x, y) + \alpha(y) + \beta(x) = xy + \frac{x^4}{2} + 2\frac{y^3}{3} = C$$

<u>Solución:</u> $xy + \frac{x^4}{2} + 2\frac{y^3}{3} = C$

Ejemplo

$$2x - y + (y^2 - x)\frac{dy}{dx} = 0 \text{ si } f(2) = 1$$

Paso 1 – Verificar que se cumple la condición de simetría

$$(2x - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$$

$$\boldsymbol{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 \qquad \textbf{¡SE CUMPLE!}$$

Paso 2 – Plantear $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ e integrar ambas expresiones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = (2x - y) \rightarrow & \int dU = \int (2x - y)dx = x^2 - xy \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = (y^2 - x) \rightarrow & \int dU = \int (y^2 - x)dy = \dfrac{y^3}{3} - xy \end{cases}$$

Paso 3 – Buscar $U(x,y) = C$

$$U(x,y) = F(x,y) + \alpha(y) + \beta(x) = -xy + x^2 + \frac{y^3}{3} = C$$

Solución general

$$-xy + x^2 + \frac{y^3}{3} = C$$

Solución particular

$$(x;y) = (2;1) \Leftrightarrow -2 + 4 + \frac{1}{3} = C \longrightarrow \frac{7}{3} = C$$

$$-xy + x^2 + \frac{y^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Tipo de EDO orden 1	Forma funcional	Pasos de resolución
ECUACIONES DIFERENCIALES EN VARIABLES SEPARABLES	$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$	1-Se separan las variables 2-Cada miembro de la ecuación queda constituido por una sola variable y su diferencial 3-Luego se integra y resuelve
ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS	$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ Dónde $P(x,y) \wedge Q(x,y)$ son funciones **HOMOGÉNEAS DEL MISMO GRADO**.	1- Dividimos a toda la EDO por x^n (siendo n el grado de homogeneidad de $P(x,y) \vee Q(x,y)$) 2- Planteamos la sustitución : $v = y/x$, luego diferenciamos 3 – Se sustituye lo obtenido y por métodos algebraicos se transforma en variables separables
ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES	$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$	1- Aplicamos un factor integrante $\mu(x)$ a ambos miembros de la ecuación y obtenemos una ecuación en v.s. 2 – Resolver por método de variables separables y hallar μ 3 – Reemplazar la función μ en la ecuación (*) del paso 1 4 – Resolver en variables separables
ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOULLI	$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ $\forall n \neq 0 \wedge n \neq 1$	1 – Dividir toda la expresión por y^n 2 – Plantear una sustitución adecuada → $z = y^{1-n}$ luego, obtener la derivada de la sustitución 3 – Reemplazar lo obtenido en la expresión original 4 – Resolver por método de ecuaciones diferenciales lineales
ECUACIONES DIFERENCIALES DE EXACTAS	$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ **Y se cumple la condición de simetría:** $P'_y = Q'_x$	1 – Verificar que se cumple la condición de simetría 2 – Plantear $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ e integrar ambas expresiones 3 – Buscar $U(x,y) = C$

Ejercicios del Trabajo práctico VI

Ejercicios del libro : Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 15

Di Caro H., Gallego L. (1999). Análisis Matemático II con aplicaciones a la Economía. Ediciones Macchi; capítulo 10

Ejercicios Adicionales:

1-

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales reducibles a lineales (Bernoulli).

a) $\frac{dy}{dx} = y + xy^5$

b) $y' + \frac{2y}{x} = -\frac{xy^2}{2}$

c) $y' + 2xy = -xy^4$ si $f(0) = 1$

d) $\frac{dy}{dx} = y^2 \ln x - \frac{y}{x}$

e) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3 y^4$

f) $x^2 y' + 2xy = y^3$

g) $xy' + y = x^2 y^2$

h) $\frac{dy}{dx} - 4y = 2e^x \sqrt{y}$

i) $xy' - 2y = 4x^3 \sqrt{y}$

2-

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales exactas.

a) $(2x^3 + 3y)\,dx + (3x + y - 1)\,dy = 0$

b) $2x - y + (y^2 - x)\dfrac{dy}{dx} = 0$ si $f(2) = 1$

c) $(x + y\cos x)\,dx + \operatorname{sen} x\,dy = 0$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y + 1}{y - x + 3}$

e) $(2x + 3y + 4)\,dx + (3x + 4y + 5)\,dy = 0$

f) $(x^3 + xy^2)\,dx + (x^2 y + y^3)\,dy = 0$ si $f(1) = 1$

g) $\left(3x^2\,tg\,y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$

3-

a) $\frac{dy}{dx} = y^3 - 2y$

b) $(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$

c) $\frac{dy}{dx} - y = e^x$

d) $(1 + x^3)\,dy - x^2 y\,dx = 0$ si $f(1) = 2$

e) $2xy^3 + 3x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = 0$

g) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$

h) $2y\,dx + (1 - ln\ y - 2x)\,dy = 0$

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + e^{1/x}$

k) $y' = e^{2x} + y - 1$

l) $\left(y\,cos\frac{y}{x} - x\right)dx - x\,cos\frac{y}{x}\,dy = 0$

m) $y' = x\sqrt{y} - y$

n) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(y^2 + 1)}{y^3 (x - 1)}$ si $f(2) = 2$

o) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2 + 2y}{2x^2 y + 2x}$

p) $\left(\frac{5}{1 + x^2} + 2y\right)dx + 2x\ dy = 0$

q) $x\,e^x\,dx + \frac{1}{v}\,dy = 0$

r) $2y\,dx + (3y - 2x)\,dy = 0$

s) $\frac{dy}{dx} + 2xy + x = e^{-x^2}$

t) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^3} - \frac{2y}{x}$ si $f(1) = 2$

u) $y' = y + sen\ x + cos\,2x$

v) $2x + 3 + (2y - 2)\frac{dy}{dx} = 0$

w) $9x^2 + y - 1 - (4y - x)\frac{dy}{dx} = 0$ si $f(0) = 1$

x) $(4y^3 x - 6x^2 y^2 + 4x^4)\,dx - (3x^2 y^2 - 4x^3 y)\,dy = 0$

4-

En un modelo macroeconómico, $C(t)$, $I(t)$ e $Y(t)$ designan respectivamente, consumo, inversión y renta nacional de un país en el instante t. Supongamos que para todo t :

$$C(t)+I(t)=Y(t) \qquad I(t)=k\,\frac{dC(t)}{dt} \qquad C(t)=a\,Y(t)+b$$

donde a, b y k son constantes positivas, $a<1$. **a)** Deduzca la ecuación diferencial para $Y(t)$: $\frac{dY(t)}{dt}=\frac{1-a}{k\,a}Y(t)-\frac{b}{k\,a}$. **b)** Encuentre la solución para $Y(0)=Y_0>\frac{b}{1-a}$ y encuentre la función $I(t)$ correspondiente. **c)** Calcule $\lim_{t\to+\infty}\frac{Y(t)}{I(t)}$

Respuestas ejercicios adicionales

1-

a) $y=\left(\frac{1}{4}-x+Ce^{-4x}\right)^{-1/4}$ b) $x^2y\left(\frac{\ln x}{2}+C\right)=1$ c) $y=\frac{1}{2}\left(3e^{3x^2}-1\right)$

d) $y=\frac{2}{x(\ln x)^2+2Cx}$ e) $y^3x^3(C-3x)=1$ f) $y=\sqrt{\frac{5x}{2+5Cx^5}}$

g) $xy(C-x)=1$ h) $y=e^{2x}\left(Ce^x-1\right)^2$ i) $y=x^2\left(x^2+C\right)^2$

2-

a) $x^4+6xy+y^2-2y=C$ b) $x^2-xy+\frac{y^3}{3}=\frac{7}{3}$ c) $x^2+2y\,sen\,x=C$

d) $x^2+2xy-y^2+2x-6y=C$ e) $x^2+3xy+4x+2y^2+5y=C$

f) $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=1$ g) $x^3tg\,y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=C$

3-

a) Reducible a lineal: $y^2\left(\frac{1}{2}+C\,e^{4x}\right)=1$

b) Homogénea y reducible a exacta: $\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}=C$

c) Lineal: $y=e^x\,(C+x)$ **d)** Variables separables: $y=\sqrt[3]{4\,(1+x^3)}$

e) Homogénea y Variables separables: $x^2y^3=C$

g) Homogénea: $y=\frac{C\,x^2}{1-C\,x}$ **h)** Reducible a exacta: $\frac{2x+ln\,y}{y}=C$

i) Lineal: $y=x^2\left(C-e^{1/x}\right)$

k) Reducible a exacta y lineal: $y=C\,e^x+e^{2x}+1$ **l)** Homogénea: $e^{-sen\,(y/x)}=C\,x$

m) Reducible a lineal: $\sqrt{y}=x-2+C\,e^{-(x/2)}$

n) Variables separables: $y^2=ln\,(y^2+1)+2x+2\,ln\,(x-1)-ln\,5$

o) Exacta: $x^2y^2+2xy=C$ **p)** Exacta: $5\,arctg\,x+2xy=C$

q) Variables separables: $y\,e^{e^x\,(x-1)}=C$

r) Reducible a exacta y homogénea: $3y\,ln\,y+2x=C\,y$

s) Lineal: $(2y+1)\,e^{x^2}=2x+C$

t) Reducible a lineal: $\frac{1}{y^2}=\frac{1}{3x^2}-\frac{x^4}{12}$

u) Lineal: $y=C\,e^x-\frac{sen\,x}{2}$ **v)** Exacta: $x\,(x+3)+y\,(y-2)=C$

w) Exacta: $3x^3+xy-x-2y^2=-2$ **x)** Homogénea: $y^3-2xy^2+4x^3=C\,x^4$

4-

b) $Y(t) = \left(Y_0 - \frac{b}{1-a} \right) e^{\frac{(1-a)t}{k\,a}} + \frac{b}{1-a}$ $\qquad I(t) = (1-a)\,Y(t) - b = \left[(1-a)\,Y_0 - b \right] e^{\frac{(1-a)t}{k\,a}}$

c) $\lim_{t \to +\infty} \frac{Y(t)}{I(t)} = \frac{1}{1-a}$

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior (parte 1)

Material complementario

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 16

Prof.: Rita Beatriz Morrone

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior:

Forma funcional

$$\sum_{i=0}^{k} f_i(t)\, y^{k-i}(t) = g(t)$$

Si $g(t) = 0$ → solución homogénea

$y^h(t)$ es solución homogénea

$$\sum_{i=0}^{k} f_i(t)\, y_H^{k-i}(t) = 0$$

Si $g(t) \neq 0$ → solución completa

$y^c(t)$ es solución completa

$$\sum_{i=0}^{k} f_i(t)\, y_C^{k-i}(t) = g(t)$$

- ✓ $f_j(x)$ son funciones distintas de costantes, entonces la EDO presenta COEFICIENTES VARIABLES
- ✓ Si la EDO presenta COEFICIENTES CONSTANTES, entonces la EDO se escribe como:

$$a_0 \cdot y^n(x) + a_1 \cdot y^{n-1}(x) + \cdots + a_n \cdot y(x) = g(x) \qquad \text{Con } a_j \in \mathbb{R}\ \forall j.$$

Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes de orden 2

$$a_o y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = g(x) \quad (1)$$

En donde:

$a_2, a_1\ y\ a_0 \in \mathbb{R}$

$a_0 \neq 0$

$g(x)$ es una función continua en un intervalo dado (a, b)

Si $g(x) \neq 0$ se la denomina ecuación diferencial no homogénea o completa.

Si $g(x) = 0$ se dice que es la ecuación diferencial homogénea.

Sea $g(x)$ una función continua en un intervalo (a,b). La solución general de la ecuación diferencial (1) en (a,b) es igual a la suma de la solución general de la ecuación homogénea (que denominaremos: $y_H(x)$) y de cualquier solución particular de la ecuación no homogénea (que denominaremos solución complementaia: $y_C(x)$)

$$\boldsymbol{y_G(x) = y_H(x) + y_C(x)}$$

La búsqueda de la solución general de la ecuación diferencial, la vamos a plantear en dos partes:

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

Paso 2 – Hallar la solución complementaria: Método de los coeficientes indeterminados

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

Dada la ED de orden 2:

$$a_0 y''(x) + a_1\, y'(x) + a_2 y(x) = g(x)$$

Su ecuación diferencial homogénea asociada es: $\boldsymbol{a_0 y''(x) + a_1\, y'(x) + a_2 y(x) = 0}$

La solución de la ecuación diferencial homogénea es un subespacio de dimensión 2: Para generar todo el conjunto solución se deben encontrar dos funciones linealmente independientes: $y_{H1}(x)$ $y_{H2}(x)$.

Para encontrar la solución de la ecuación diferencial homogénea se debe plantear la combinación lineal de ambas funciones:

$$\boldsymbol{y_H(x) = C_1\, y_{H1}(x) + C_2\ y_{H2}(x)}$$

Procedimiento para hallar la solución homogénea

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = 0$$

Se propone como solución de la ecuación diferencial homogénea: $y_H(x) = e^{rx}$

$$y'_H(x) = re^{rx}$$

$$y''_H(x) = r^2 e^{rx}$$

Si lo propuesto es solución se debe verificar Ecuación Diferencial Homogénea

Reemplazamos en la ecuación diferencial homogénea:

$$a_0 r^2 e^{rx} + a_1 re^{rx} + a_2 e^{rx} = 0$$

$$\underbrace{e^{rx}}_{\neq 0}(a_0 r^2 + a_1 r + a_2) = 0 \leftrightarrow \underbrace{a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0}_{\text{Polinomio Característico}}$$

Ecuación característica

Polinomio en r de grado 2, puede tener dos raíces

$$r_1, r_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(a_1)^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}$$

Las raíces del polinomio de grado 2 pueden ser:

I. **Raíces reales y distintas: r_1 y r_2** → $si\ (a_1)^2 > 4a_0 a_2$

II. **Raíces reales iguales: r** → $si\ (a_1)^2 = 4a_0 a_2$

III. **Raíces complejas conjugadas: $a \pm bi$** → $si\ (a_1)^2 < 4a_0 a_2$

Planteo de la solución homogénea cuando las raíces son reales y distintas

I. Raíces reales y distintas: r_1 y r_2

Como la solución propuesta es: $y_H(x) = e^{rx}$. Obtenemos dos soluciones homogéneas:

$y_{H1}(x) = e^{r_1 x}$

$y_{H2}(x) = e^{r_2 x}$

La solución homogénea resultante será una combinación lineal de ambas soluciones:

$$y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Ejemplo

Dada la siguiente ecuación diferencial homogénea: $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$. Hallar la $y_H(x)$

1- Se propone como solución de la ecuación diferencial homogénea: $y_H(x) = e^{rx} \rightarrow y'_H(x) = re^{rx} \rightarrow y''_H(x) = r^2 e^{rx}$

2- Reemplazamos en la ecuación diferencial homogénea: $r^2 e^{rx} - re^{rx} - 2e^{rx} = 0 \rightarrow e^{rx}(r^2 - r - 2) = 0$

3- Ecuación característica: $r^2 - r - 2 = 0$. Raíces de la ecuación característica: $r_1 = 2\ r_2 = -1$

$y_{H1}(x) = e^{2x}$ $\qquad$ $y_{H2}(x) = e^{-1x}$

4- Planteo de la solución homogénea:

$$y_H(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-1x}$$

Planteo de la solución homogénea cuando las raíces son reales iguales

II. Raíces reales iguales: $r_1 = r_2 = r$

Como la solución propuesta es: $y_H(x) = e^{rx}$ Obtenemos una solución homogénea:

$$y_{H1}(x) = e^{rx}$$

El subespacio de solución es de dimensión 2, por lo tanto, el conjunto solución se genera con dos soluciones linealmente independientes. La solución propuesta es:

$$y_{H2}(x) = \boldsymbol{xe^{rx}}$$

La solución homogénea resultante será una combinación lineal de ambas soluciones:

$$\boldsymbol{y_H(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}}$$

¡¡¡Se debe romper la dependencia lineal!!!

Ejemplo

Dada la siguiente ecuación diferencial homogénea: $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$. Hallar la $y_H(x)$

1-Se propone como solución de la ecuación diferencial homogénea: $y_H(x) = e^{rx} \rightarrow y'_H(x) = re^{rx} \rightarrow y''_H(x) = r^2 e^{rx}$

2- Reemplazamos en la ecuación diferencial homogénea: $r^2 e^{rx} + 2re^{rx} + e^{rx} = 0 \rightarrow e^{rx}(r^2 + 2r + 1) = 0$

3- Ecuación característica: $r^2 + 2r + 1 = 0$. Raíces de la ecuación característica: $r_1 = r_2 = -1$

$$y_{H1}(x) = e^{-x} \qquad y_{H2}(x) = xe^{-x}$$

4- Planteo de la solución homogénea:

$$\boldsymbol{y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}}$$

Planteo de la solución homogénea cuando las raíces son complejas

III. Raíces complejas conjugadas: $r_{1,2} = \mathbf{a} \pm \boldsymbol{bi}$

Como la solución propuesta es: $y_H(x) = e^{rx}$ Obtenemos una solución homogénea:

$$y_{H1}(x) = e^{(\mathbf{a}+\boldsymbol{bi})x} \qquad y_{H2}(x) = e^{(\mathbf{a}-\boldsymbol{bi})x}$$

¡Ambas soluciones son funciones con argumento complejo!

Para trabajar con soluciones que planteen funciones en reales:

$$\boldsymbol{y_H(x) = e^{ax}(C_1 sen(bx) + C_2 \cos(bx))}$$

Ejemplo

Dada la siguiente ecuación diferencial homogénea: $y''(x) - 3y'(x) + 3y(x) = 0.$ Hallar la $y_H(x)$

1- Se propone como solución de la ecuación diferencial homogénea: $y_H(x) = e^{rx} \rightarrow y'_H(x) = re^{rx} \rightarrow y''_H(x) = r^2e^{rx}$

2- Reemplazamos en la ecuación diferencial homogénea: $r^2e^{rx} - 3re^{rx} + 3e^{rx} = 0 \rightarrow e^{rx}(r^2 - 3r + 3)=0$

3- Ecuación característica: $r^2 - 3r + 3 = 0.$

Si calculamos las raíces: $r_{1,2} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{9-4*1*3}}{2*1} \rightarrow r_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{-3}}{2} \rightarrow r_{1,2}=\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{3}}{2} \rightarrow r_{1,2}=\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\begin{cases} a = 3/2 \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

4- Planteo de la solución homogénea:

$$\boldsymbol{y_H(x) = e^{\frac{3x}{2}}\left(C_1 sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right.}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria: Método de los coeficientes indeterminados

$$a_0 y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = g(x)$$

$$¿\, y_C\,(x)?$$

El método de los coeficientes indeterminados es un procedimiento para encontrar la solución complementaria de una ecuación diferencial con coeficientes constantes en donde g(x) tenga, como forma general la siguiente forma:

$\boldsymbol{g(x)}$	$\boldsymbol{y_C(x)}$ Debe ser linealmente independiente de la solución homogénea.	EJEMPLOS	
		Si $g(x)$	Proponer como: $y_c(x)$
K	A	5	A
$P_n = polinomio\ de\ grado\ n$	Polinomio completo de grado n	$3x^2 + 1$	$Ax^2 + \mathrm{Bx} + \mathrm{C}$
Ke^{ax}	Ae^{ax}	$7e^{3x}$	Ae^{3x}
$sen(ax)$ $\cos(ax)$ $sen(ax) + \cos(ax)$	$Asen(ax) + \mathrm{Bcos}(ax)$	$2\cos(9x)$	$Asen(9x) + \mathrm{Bcos}(9x)$

El método de coeficientes indeterminados consiste en:

1) Se replica la ecuación diferencial a partir del ensayo de una función genérica del tipo que presenta $g(t)$.

2) A partir de ese ensayo de solución se calculan los coeficientes de la función ensayada en base a la réplica de la ecuación diferencial. El cálculo de esos coeficientes y la correspondiente especificidad de la función ensayada sobre la forma de $g(t)$, y conforman la solución completa.

3) La solución general (por propiedades de ecuaciones diferenciales lineales), surge de la sumatoria entre la solución homogénea general y la solución completa.

4)La solución particular de una ecuación diferencial consiste en el cálculo de las constantes arbitrarias que se incluyen en cada uno de los términos de la solución homogénea y se calcula a partir de las condiciones iniciales de la ecuación.

$q(x)$	Si no es raiz de la característica	Solución propuesta
x^n	0	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_1 x + A_0$
$e^{\alpha.x}$	α	$Ae^{\alpha.x}$
$sen\,\beta.x \pm cos\,\beta.x$	$\pm\beta.i$	$A.cos\,\beta x + B.sen\,\beta x$
$x^n.e^{\alpha.x}$	α	$e^{\alpha.x}.\left(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_1 x + A_0\right)$
$e^{\alpha.x}\left(sen\,\beta.x \pm cos\,\beta.x\right)$	$\alpha \pm \beta.i$	$e^{\alpha.x}.(A.cos\,\beta x + B.sen\,\beta x)$
$x^n.e^{\alpha.x}\left(sen\,\beta.x \pm cos\,\beta.x\right)$	$\alpha \pm \beta.i$	$e^{\alpha.x}\,cos\,\beta x.\left(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \ldots + A_1 x + A_0\right) + e^{\alpha.x}\,sen\,\beta x.\left(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + B_{n-2}x^{n-2} + \ldots + B_1 x + B_0\right)$

Importante: Para los casos en los cuales los elementos de la segunda columna puedan ser raiz doble de la ecuación característica, la solución propuesta debe multiplicarse por x^2 y si son raiz simple, por x.

Ejemplo 1

Dada la siguiente ecuación diferencial: $\boldsymbol{y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 5x^2}$

a) Hallar la solución general.

b) Hallar la solución particular si: $y(0) = 1 \quad y'(0) = 2$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

$$\boldsymbol{y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0}$$

Ensayar la solución homogénea y sus derivadas

$$y_H(x) = \boldsymbol{e^{rx}} \rightarrow y'_H(x) = \boldsymbol{re^{rx}} \rightarrow y''_H(x) = \boldsymbol{r^2e^{rx}}$$

Reemplazando en la original: $\boldsymbol{r^2e^{rx} - re^{rx} - 2e^{rx} = 0}$

$$\boldsymbol{e^{rx}}\ (\boldsymbol{r^2 - r - 2}) = \boldsymbol{0}$$

$\neq 0 \qquad = 0$

$$r_1, r_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2}$$

-1

2

La solución de la ecuación homogénea es:

$$\boldsymbol{y_H(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-1x}}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria: Método de los coeficientes indeterminados

2. Debemos buscar la $y_C(x)$ con el método de los coeficientes indeterminados.
   - $Analizamos\ g(x) = 5x^2$ y la comparamos con la solución homogénea de forma de asegurarnos que sean linealmente independientes.
   - En base a la forma que tiene g(x) proponemos una $y_C(x) = \mathrm{Ax}^2 + \mathrm{Bx} + \mathrm{C}$ (polinomio completo de grado 2)
   - Derivamos:

$$y'_C(x) = 2Ax + B \rightarrow y''_C(x) = 2A$$

   - Reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$2A - (2Ax + B) - 2(\mathrm{Ax}^2 + \mathrm{Bx} + \mathrm{C}) = 5x^2$$

$$2A - 2AX - B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 5x^2$$

Reordenando:

$$-2Ax^2 + (-2A - 2B)x + (2A - B - 2C) = 5x^2$$

$$\begin{cases} -2A = 5 \\ -2A - 2B = 0 \\ 2A - B - 2C = 0 \end{cases} \rightarrow A = -\frac{5}{2} \quad B = \frac{5}{2} \quad C = -\frac{15}{4} \rightarrow \boldsymbol{y_C(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{15}{4}}$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$y_H(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-1x}$$

$$y_C(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{15}{4}$$

$$y_G(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-1x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{15}{4}$$

a) Solución general

Paso 4– Hallar la solución particular a partir de las condiciones iniciales

Hallar la solución particular si: $y(0) = 1 \quad y'(0) = 2$

$$y_G(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-1x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{15}{4} \rightarrow y'_G(x) = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - 5x + \frac{5}{2}$$

$$y_G(0) = 1 \rightarrow C_1 e^0 + C_2 e^0 - \frac{5}{2} * 0^2 + \frac{5}{2} * 0 - \frac{15}{4} = 1 \rightarrow C_1 + C_2 - \frac{15}{4} = 1$$

$$y'_G(0) = 2 \rightarrow 2C_1 e^0 - C_2 e^0 - 5 * 0 + \frac{5}{2} = 2 \rightarrow 2C_1 - C_2 + \frac{5}{2} = 2$$

$C_1 = \frac{17}{12} \qquad C_2 = \frac{10}{3}$

$$y_P(x) = \frac{17}{12}e^{2x} + \frac{10}{3}e^{-1x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{15}{4}$$

b) Solución particular

Ejemplo 2

$$y'' + y' = 4x - 1$$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

$$y'' + y' = 0 \rightarrow r^2 + r = 0 \rightarrow \mathrm{r(r+1)} = 0 \rightarrow r_1 = 0\,;\, r_2 = -1$$

$$\boldsymbol{y_h = C_1 + C_2 e^{-x}}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria: Método de los coeficientes indeterminados

$g(x) = 4x - 1 = Polinomio\ completo\ de\ grado\ 1 \quad \rightarrow \quad y_c = Ax + B$

La solución complementaria es Linealmente dependiente con la solución homogénea C_1:

SE DEBE ROMPER DEPENDENCIA MULTIPLICANDO POR x:

$y_c = (Ax + B)x \rightarrow y_c = Ax^2 + Bx$

$y'_c = 2Ax + B \rightarrow y''_c = 2A$

$2A + 2Ax + B = 4x - 1 \quad \rightarrow \quad (2A)x + (2A + B) = 4x - 1$

$$\begin{cases} 2A = 4 \\ 2A + B = -1 \end{cases} \rightarrow \quad A = 2 \text{ y } \mathrm{B} = -5$$

$$\boldsymbol{y_c = 2x^2 - 5x}$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$\boldsymbol{y_{SG} = C_1 + C_2 e^{-x} + 2x^2 - 5x}$$ solución general

EJEMPLO 3

Dada la siguiente ecuación diferencial: $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 3e^x$

a) Hallar la solución general. b) Hallar la solución particular si: $y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

Se propone como solución de la ecuación diferencial homogénea: $y_H(x) = e^{rx} \rightarrow y'_H(x) = re^{rx} \rightarrow y''_H(x) = r^2e^{rx}$

Reemplazamos: $r^2e^{rx} - re^{rx} - 2e^{rx} = 0 \rightarrow e^{rx}(r^2 - r - 2) = 0$

Ecuación característica: $r^2 - r - 2 = 0$. Raíces de la ecuación característica: $r_1 = 2 \; r_2 = -1$

$$y_{H1}(x) = e^{2x} \qquad y_{H2}(x) = e^{-1x}$$

Planteo de la solución homogénea: $\boldsymbol{y_H(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-1x}}$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria: Método de los coeficientes indeterminados

Analizamos $g(x) = 3e^x$ y la comparamos con la solución homogénea de forma de asegurarnos que sean linealmente independientes.

En base a la forma que tiene g(x) proponemos una $y_C(x) = Ae^x \rightarrow \quad y'_C(x) = Ae^x \rightarrow \quad y''_C(x) = Ae^x$

Reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$Ae^x - Ae^x - 2Ae^x = 3e^x \rightarrow -2Ae^x = 3e^x \rightarrow A = -3/2$$

La solución complementaria es: $\boldsymbol{y_C(x) = -\frac{3}{2}e^x}$

Paso 3 – Armar la solución general → $\boldsymbol{y_G(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-1x} - \frac{3}{2}e^x}$ a) SOLUCIÓN GENERAL

Paso 4– Hallar la solución particular a partir de las condiciones iniciales

$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

$$y_G(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{2} e^x$$ a) SOLUCIÓN GENERAL

Para hallar la solución particular:

$$y_G(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{2} e^x \rightarrow y'_G(x) = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - \frac{3}{2} e^x$$

$$\left.\begin{array}{ll} y_G(0) = 0 \rightarrow C_1 e^{2*0} + C_2 e^{-0} - \frac{3}{2} e^0 = 0 & \rightarrow C_1 + C_2 - \frac{3}{2} = 0 \\ y'_G(0) = 0 \rightarrow 2C_1 e^{2*0} - C_2 e^{-0} - \frac{3}{2} e^0 = 0 & \rightarrow 2C_1 - C_2 - \frac{3}{2} = 0 \end{array}\right\} \quad C_1 = 1 \quad C_2 = \frac{1}{2}$$

$$y_p(x) = 1e^{2x} + \frac{1}{2} e^{-x} - \frac{3}{2} e^x$$ b) SOLUCIÓN PARTICULAR

EJEMPLO 4

Dada la siguiente ecuación diferencial: $y'(x) + 8y(x) = 2$

a) Hallar la solución general. b) Hallar la solución particular si: $y(0) = 4$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

Se propone como solución de la ecuación diferencial homogénea: $y_H(x) = e^{rx} \rightarrow y'_H(x) = re^{rx}$

Reemplazamos: $re^{rx}+8e^{rx} = 0 \rightarrow e^{rx}(r+8)=0$

Ecuación característica: $r + 8 = 0$. Raíz de la ecuación característica: $r_1 = -8$

$$y_{H1}(x) = e^{-8x}$$

Planteo de la solución homogénea: $\boldsymbol{y_H(x)= C_1 e^{-8x}}$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria: Método de los coeficientes indeterminados

Analizamos $g(x) = 2$ y la comparamos con la solución homogénea de forma de asegurarnos que sean linealmente independientes.

En base a la forma que tiene g(x) proponemos una $y_C(x) = A \rightarrow y'_C(x) = 0$

Reemplazamos en la ecuación diferencial: $0 + 8\mathrm{A} = 2 \rightarrow \mathrm{A} = 1/4$

La solución complementaria es: $\boldsymbol{y_C(x) = \frac{1}{4}}$

Paso 3 – Armar la solución general

$\boldsymbol{y_G(x)= C_1 e^{-8x} + \frac{1}{4}}$ ***SOLUCIÓN GENERAL***

Paso 4– Hallar la solución particular a partir de las condiciones iniciales

$\boldsymbol{y_p(x)= \frac{15}{4} e^{-8x} + \frac{1}{4}}$

Estabilidad

La solución general de la ecuación diferencial homogénea es estable si la solución homogénea tiende a cero a medida que la variable independiente tiende a infinito.

Otra forma de ver la condición de estabilidad es pensando que en el infinito la solución general converge a la solución completa o al equilibrio.

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{i=1}^{k} C_i \, e^{r_i t} = 0$$

Si sacamos factor común la solución asosciada a la mayor raíz r_1

$$\lim_{t \to \infty} e^{r_1 t} \left[c_1 + c_2 \frac{e^{r_2 t}}{e^{r_1 t}} + \ \ldots + c_k \frac{e^{r_k t}}{e^{r_1 t}} \right] = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} e^{r_1 t} \left[c_1 + c_2 e^{(r_2 - r_1) t} + \ \ldots + c_k e^{(r_k - r_1) t} \right] = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} e^{r_1 t} = 0 \ \leftrightarrow \ r_1 < 0$$

Ejemplo 5

En este modelo, tanto Qd como Qs son funciones sólo del precio actual P , pero la oferta y la demanda se rigen no solo por el precio presente, sino también por las expectativas en los precios futuros. El modelo viene dado por:

$$\begin{aligned} Q_d &= \alpha - \beta P + mP' + nP'' && (\alpha, \beta, n > 0) \\ Q_s &= -\gamma + \delta P + uP' + wP'') && (\gamma, \delta > 0) \\ Q_d &= Q_s && (u, w = 0) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que u=w=0, el modelo queda planteado de esta forma:

$$\begin{aligned} Q_d &= \alpha - \beta P + mP' + nP'' && (\alpha, \beta, n > 0) \\ Q_s &= -\gamma + \delta P && (\gamma, \delta > 0) \\ Q_d &= Q_s \end{aligned}$$

Paso 1 :Debido a que en el equilibrio, la oferta es igual a la demanda, se condensa en un sola expresión

$$\alpha - \beta P + mP' + nP'' = -\gamma + \delta P$$

Paso 2 :Despejando y reordenando:

$$nP'' + mP' - (\beta + \delta)P = (\alpha - \gamma)$$

Normalizando obtenemos la ecuación diferencial :

$$\mathrm{P}'' + \tfrac{m}{n}P' - \tfrac{\beta+\delta}{n}P = -\tfrac{\alpha+\gamma}{n}$$

A partir de la ecuación característica se obtienen las raíces:

$$\mathrm{P}'' + \tfrac{m}{n}P' - \tfrac{\beta+\delta}{n}P = 0$$

$$\mathrm{r}_1, r_2 = \frac{1}{2}\left[-\frac{m}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)}\right]$$

Paso 3 :obtenemos la solución homogénea a partir de la ecuación característica según el caso:

Caso 1 : raíces reales y distintas:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 > -4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)$$

Caso 2 : raíces reales dobles:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = -4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)$$

Caso 3 : raíces complejas

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 < -4\left(\frac{\beta+\delta}{n}\right)$$

Bajo el supuesto que n es mayor a cero, el único caso factible es el primero, con raíces reales y distintas, por ende la solución homogénea será:

$$P_h = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Como n es positivo, y beta y delta también ,entonces la expresión que queda bajo el radical es necesariamente mayor a (m/n)2 y entonces la raíz cuadrada será mayor que —m/n—. Como consecuencia habrá una raíz positiva y otra negativa ,por lo que el equilibrio intertemporal será dinámicamente inestable.

Luego se debe hallar la solución completa:

$$P'' + \frac{m}{n} P' - \frac{\beta+\delta}{n} P = -\frac{\alpha+\gamma}{n}$$

$Propuesta : A$

$$P = A$$
$$P' = 0$$
$$P'' = 0$$
$$0 + 0 - \frac{\beta+\delta}{n} A = -\frac{\alpha+\gamma}{n}$$
$$A = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

Por último se obtiene la Solución general ; y en el caso que se den las condiciones iniciales se podrá obtener la solución particular.

$$P(t) = P_h + P_c = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

Otro Ejemplo

$y'' - 2y' + 2y = 5e^{2x}\cos x$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

Ensayamos la solución homogénea:

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = re^{rx} \qquad y''(x) = r^2e^{rx}$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$r^2e^{rx} - 2re^{rx} + 2e^{rx} = 0$$

Sacamos factor común e^{rx}:

$$\underbrace{e^{rx}}_{\neq 0}(r^2 - 2r + 2) = 0$$

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} =$$

$$1 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} =$$

$$1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$$

$$y_h = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria: Método de los coeficientes indeterminados

$$y(x) = Ae^{2x}(B\cos x + C\sin x)$$

$$y'(x) = Ae^{2x}[(2B + C)\cos x + (2C - B)\sin x]$$

$$y''(x) = Ae^{2x}[(3B + 4C)\cos x + (3C - 4B)\sin x]$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$Ae^{2x}[(3B+4C)\cos x+(3C-4B)\sin x]-2Ae^{2x}[(2B+C)\cos x+(2C-B)\sin x]+2Ae^{2x}(B\cos x+C\sin x) = 5e^{2x}\cos x$$

$$Ae^{2x}[(3B + 4C - 4B - 2C + 2B)\cos x + (3C - 4B - 4C + 2B + 2C)\sin x] = 5e^{2x}\cos x$$

$$Ae^{2x}[(B + 2C)\cos x + (C - 2B)\sin x] = 5e^{2x}\cos x$$

Igualamos miembro a miembro:

$$\begin{cases} Ae^{2x} = 5e^{2x} \longrightarrow A = 5 \\ (C - 2B)\sin x = 0 \longrightarrow C = 2B \\ (B + 2C)\cos x = \cos x \longrightarrow B + 2C = 1 \end{cases}$$

Reemplazamos el valor de C en la tercer ecuación:

$$B + 4B = 1 \rightarrow 5B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{5}$$

$$C = 2B \rightarrow C = \frac{2}{5}$$

$$y_c = 5e^{2x}\left(\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x\right) = e^{2x}(\cos x + 2\sin x)$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$y_g = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}(\cos x + 2\sin x)$$

Para que sea estable, la raíz de mayor valor debe ser negativa. Por lo tanto, es inestable.

Otro caso:

$y''' - 4y' = 3e^{2x}$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

Ensayamos la solución homogénea:

$$y(x) = e^{rx} \qquad y'(x) = re^{rx} \qquad y''(x) = r^2e^{rx} \qquad y'''(x) = r^3e^{rx}$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$r^3e^{rx} - 4re^{rx} = 0$$

Sacamos factor común e^{rx}:

$$\underbrace{e^{rx}}_{\neq 0}(r^3 - 4r) = 0$$

$$r(r^2 - 4) = 0 \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = -2 \end{cases}$$

$$y_h = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria: Método de los coeficientes indeterminados

$$y(x) = Axe^{2x} \qquad y'(x) = Ae^{2x}(1+2x)$$
$$y''(x) = 2Ae^{2x}(2+2x) \qquad y'''(x) = 4Ae^{2x}(3+2x)$$

Reemplazamos en la ecuación:

$$4Ae^{2x}(3+2x) - 4Ae^{2x}(1+2x) = 3e^{2x}$$

$$12Ae^{2x} + 8xAe^{2x} - 4Ae^{2x} - 8xAe^{2x} = 3e^{2x}$$

$$8Ae^{2x} = 3e^{2x}$$

$$A = \frac{3}{8}$$

$$y_c = \frac{3}{8}xe^{2x}$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$y_g = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x} + \frac{3}{8}xe^{2x}$$

Para que sea estable, la raíz de mayor valor debe ser negativa. Por lo tanto, es inestable.

Ejercicios del libro : Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 16

Ejercicios Adicionales:

1- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales no homogéneas utilizando el método de los coeficientes indeterminados.

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = x$

b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 3x$

c) $y'' - 3y' + 2y = x^3 - 3x + 2$

d) $y'' - y' = 2x^2 + 6$

e) $y'' - 4y' + 3y = 6e^{2x}$

f) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2e^{-x}$

g) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{2}e^{-x}$

h) $y'' - 8y' + 7y = 14$

i) $y'' + 9y = \cos 2x$

j) $y'' + y = 4\,sen\,2x$

k) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x$

l) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 2e^{x}$

m) $y'' - 2y' = e^{2x} + 5$

n) $y'' + 9y = 3\cos 3x$

o) $y'' - y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

p) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 2 + e^{x}$

q) $y'' + y = 4\cos x$

r) $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$

s) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = e^x \ sen\ x$

t) $y'' - 3y' + 2y = e^x + e^{3x}$

u) $y'' + 2y = sen\ 2x + cos\ 3x$

v) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 e^{2x} + e^{2x}$

2- Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales, en cada caso, que satisfaga las condiciones dadas.

a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 9e^{3x}$ si $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{3}{2}$

b) $y'' - 6y' + 13y = 39$ si $f(0) = 4$ y $f'(0) = 3$

c) $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^x\ (12x - 7)$ si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$

d) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2\ e^x$ si $f(0) = 2$ y $f'(0) = 3$

e) $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 5\ cos\ 2x$ si $f(0) = 1$ y $f'(0) = 3$

f) $y'' + 2y' = 4\ e^x\ (sen\ x + cos\ x)$ si $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$

3- Si q_d y q_o son las funciones de demanda y oferta, respectivamente, de un cierto bien en el mercado con las condiciones iniciales dadas. Determine, en cada caso: **i)** La evolución del precio en función del tiempo $p = f(t)$, supuesto que el mercado es perfecto en cualquier momento del tiempo. **ii)** Si la evolución temporal converge hacia el precio de equilibrio con o sin fluctuaciones periódicas. **iii)** El precio de equilibrio del mercado.

a) $q_d = 2\frac{d^2p}{dt^2} + 5\frac{dp}{dt} + 20p$, $q_o = \frac{d^2p}{dt^2} + \frac{dp}{dt} + 4p$, $f(0) = \frac{1}{2}$ y $f'(0) = 2$

b) $q_d = 40 - 2p - 2\frac{dp}{dt} - \frac{d^2p}{dt^2}$, $q_o = 3p - 5$, $f(0) = 12$ y $f'(0) = 1$

c) $q_d = 3\frac{d^2p}{dt^2} + 5\frac{dp}{dt} - 2p - 8$, $q_o = \frac{d^2p}{dt^2} + 7\frac{dp}{dt} - 7p + 2$, $f(0) = \frac{1}{2}$ y $f'(0) = 3$

d) $q_d = 42 - 4p - 4\frac{dp}{dt} + \frac{d^2p}{dt^2}$, $q_o = 8p - 6$ $f(0) = 6$ y $f'(0) = 4$

Respuestas ejercicios adicionales

1-

a) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{x}{3} - \frac{4}{9}$

b) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - x + \frac{2}{3}$

c) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{x^3}{2} + \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{35}{8}$

d) $y = C_1 + C_2 e^{x} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 - 10x$

e) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - 6e^{2x}$

f) $y = C_1 + e^{-x}(C_2 - 2x)$

g) $y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{4}\right)$

h) $y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{x} + 2$

i) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\cos 2x$

j) $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - \frac{4}{3}\operatorname{sen} 2x$

k) $y = C_1 \cos x + \left(C_2 + \frac{x}{2}\right)\operatorname{sen} x$

l) $y = e^{x}\left(C_1 + C_2 x + x^2\right)$

m) $y = C_1 + e^{2x}\left(C_2 + \frac{x}{2}\right) - \frac{5x}{2}$

n) $y = C_1 \cos 3x + \left(C_2 + \frac{x}{2}\right)\operatorname{sen} 3x$

o) $y = e^{x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\cos 2x - 1\right)$

p) $y = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}x + \frac{e^x}{3} + 1$

q) $y = C_1 \cos x + (C_2 + 2x)\operatorname{sen} x$

r) $y = C_1 + e^{-3x}\left(C_2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)$

s) $y = C_1 + C_2 e^{x} - \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$

t) $y = C_1 e^{2x} + e^{x}(C_2 - x) + \frac{e^{3x}}{2}$

u) $y = C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{7}\cos 3x$

v) $y = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}\right)$

2-

a) $y = \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{e^{3x}}{2}$

b) $y = e^{3x}\cos 2x + 3$

c) $y = -e^{3x} + e^{2x} + x\,e^{-x}$

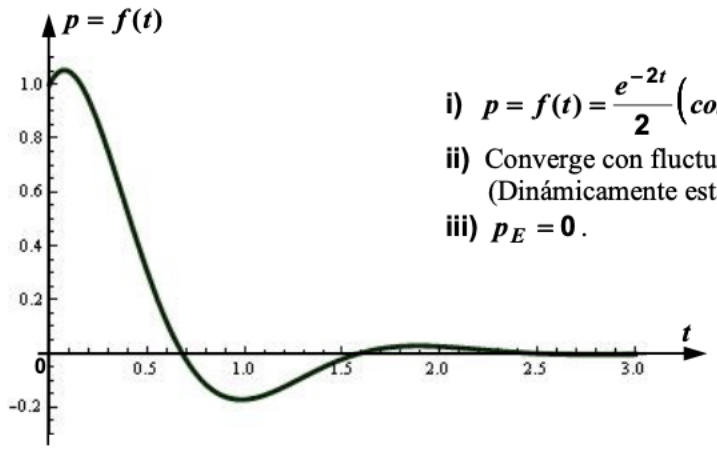
d) $y = e^{2x}\left(\cos x - 2\operatorname{sen} x\right) + e^{x}\,(x+1)^2$

e) $y = \operatorname{sen} 3x + \cos 2x$

f) $y = -\frac{1}{10} + \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{2e^{x}}{5}\left(3\operatorname{sen} 2x - \cos x\right)$

3-

a)

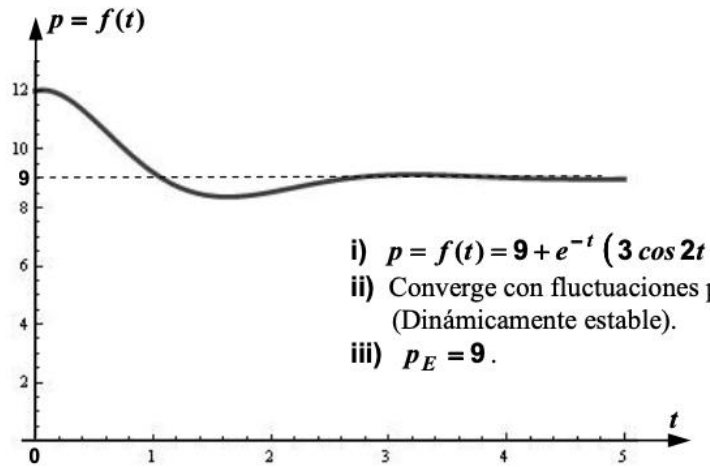


i) $p = f(t) = \frac{e^{-2t}}{2}\left(\cos 2\sqrt{3}t + \sqrt{3}\operatorname{sen} 2\sqrt{3}t\right)$

ii) Converge con fluctuaciones periódicas. (Dinámicamente estable).

iii) $p_E = 0$.

b)



i) $p = f(t) = 9 + e^{-t}\left(3\cos 2t + 2\,sen\,2t\right)$

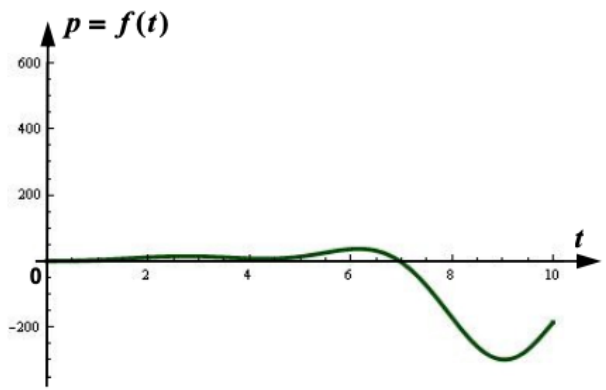
ii) Converge con fluctuaciones periódicas. (Dinámicamente estable).

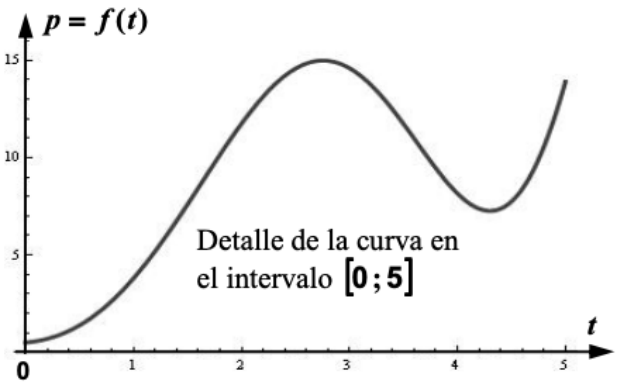
iii) $p_E = 9$.

c) i) $p = f(t) = 2 + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\left(-3\cos\frac{3t}{2} + 5\,sen\,\frac{3t}{6}\right)$

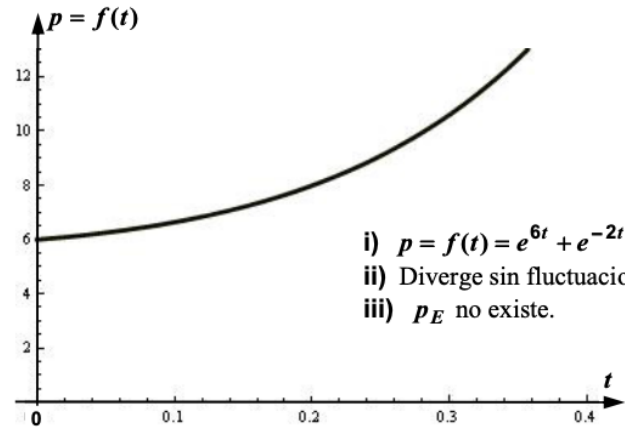
ii) Diverge con fluctuaciones periódicas (Dinámicamente inestable).

iii) p_E no existe.





d)



i) $p = f(t) = e^{6t} + e^{-2t} + 4$

ii) Diverge sin fluctuaciones (Dinámicamente inestable).

iii) p_E no existe.

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior (parte 2)

Material complementario

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 16

Prof.: Rita Beatriz Morrone

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior (repaso):

Forma funcional

$$\sum_{i=0}^{k} f_i(t)\, y^{k-i}(t) = g(t)$$

Si $g(t) = 0$ → solución homogénea

$y^h(t)$ es solución homogénea

$$\sum_{i=0}^{k} f_i(t)\, y_H^{k-i}(t) = 0$$

Si $g(t) \neq 0$ → solución completa

$y^c(t)$ es solución completa

$$\sum_{i=0}^{k} f_i(t)\, y_C^{k-i}(t) = g(t)$$

- ✓ $f_j(x)$ son funciones distintas de costantes, entonces la EDO presenta COEFICIENTES VARIABLES
- ✓ Si la EDO presenta COEFICIENTES CONSTANTES, entonces la EDO se escribe como:

$$a_0 \cdot y^n(x) + a_1 \cdot y^{n-1}(x) + \cdots + a_n \cdot y(x) = g(x) \qquad \text{Con } a_j \in \mathbb{R}\ \forall j.$$

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES - PROPIEDADES

I. Combinación lineal finita de soluciones homogéneas:

Si $y_1 \wedge y_2$ *son* y^H entonces, $y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ *es* y^H

Donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias

Demostración:

$$y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y'_3 = c_1 y'_1 + c_2 y'_2$$

...

$$y_3^k = c_1 y_1^k + c_2 y_2^k$$

$$\sum_{i=0}^{k} f_i(t) \left[c_1 y_1^{k-i} + c_2 y_2^{k-i} \right] = 0$$

$$c_1 \sum_{i=0}^{k} f_i(t) y_1^{k-i} + c_2 \sum_{i=0}^{k} f_i(t) y_2^{k-i} = 0$$

II. Independencia lineal de las soluciones

Un conjunto de funciones $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ es linealmente dependiente si existen constantes $c_1, c_2, \dots, c_k$, no todas nulas tal que:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i y_i = 0$$

Si $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ entonces, el conjunto es linealmente independiente.

Podemos escribir:

$$\begin{cases} c_1 y_1 + \dots + c_k y_k = 0 \\ \dots \\ c_1 y_1^k + \dots + c_k y_k^k = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_k \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{k-1} & \dots & y_k^{k-1} \end{bmatrix}}_{\text{Wronksiano}} \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $|W| \neq 0 \rightarrow$ el sistema es compatible determinado y la única solución es la trivial $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$

Entonces el conjunto de soluciones $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ es linealmente independiente.

III. Solución general

Si $y^H(t)$ es solución de la ecuación homogénea y $y^C(t)$ es solución de la completa, entonces:

$$y^G(t) = y^H(t) + y^C(t) \text{ es solución de la completa}$$

$$\sum_{i=0}^{k} f_i(t)\, y_C^{k-i}(t) = g(t) \qquad \sum_{i=0}^{k} f_i(t)\, y_H^{k-i}(t) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{k} f_i(t) \left[y_C^{k-i}(t) + y_H^{k-i}(t) \right] = g(t)$$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{k} f_i(t) y_C^{k-i}(t)}_{= g(t)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k} f_i(t) y_H^{k-i}(t)}_{= 0} = g(t)$$

Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Solución general

A partir de las propiedades, la solución general surge de la sumatoria entre la solución homogénea y la completa.

$$Y^G = Y_c + Y_H$$

Solución particular

Las k constantes de la solución homogénea quedan determinadas si se dan k condiciones iniciales.

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{k} C_i \, e^{r_i t}$$

ESTABILIDAD DE LA SOLUCIÓN

La solución general de una ecuación diferencial con coeficientes constantes diremos que es ESTABLE (en el sentido asintótico) sí y sólo sí: $\lim_{x\to+\infty} y_H(x) = 0$, cualesquiera sean las condiciones iniciales (es decir para cualquier valor de las constantes C_1 y C_2

I. Raíces reales y distintas: r_1 y r_2

$$y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y_H(x) = \lim_{x\to+\infty} (C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x})$$

Este límite va a valer cero siempre y cuando: $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$
AMBAS RAICES DEBEN SER NEGATIVAS PARA QUE LA SOLUCIÓN SEA ESTABLE

II. Raíces reales iguales: $r_1 = r_2 = r$

$$y_H(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y_H(x) = \lim_{x\to+\infty} (C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}) = C_1 \underbrace{\lim_{x\to+\infty} e^{rx}}_{\text{Cuando } r<0 \text{ =0}} + C_2 \lim_{x\to+\infty} (x e^{rx})$$

¿Cuál es el valor de este límite cuando r<0?

Analicemos el límite cuando r<0:

$$\lim_{x\to+\infty} (x e^{rx}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{-rx}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{-re^{-rx}} = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} y_H(x) = \lim_{x\to+\infty} (C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}) = 0$$

Este límite va a valer cero siempre y cuando: $r < 0$
LA RAÍZ DEBE SER NEGATIVA PARA QUE LA SOLUCIÓN SEA ESTABLE

III. Raíces complejas conjugadas: $r_{1,2} = \mathbf{a} \pm \boldsymbol{bi}$

$$y_H(x) = e^{ax}(C_1 sen(bx) + C_2 \cos(bx))$$

$$\lim_{X \to +\infty} e^{ax}(C_1 sen(bx) + C_2 \cos(bx)) = ESTE\ LÍMITE\ VALE\ O\ SI\ a < 0$$

LA SOLUCIÓN ES ESTABLE SI LA PARTE REAL DE LA RAÍZ ES NEGATIVA

Por lo tanto, queda demostrado que:

Si TODAS las raíces del polinomio característico presentan parte real negativa la solución de la ecuación diferencial se dice que es ESTABLE

Ejemplo : Dado el siguiente modelo de mercado, encuentre la trayectoria del precio

$$\begin{cases} Q_d = 42 - 4p - 4p' + p'' \\ Q_s = -6 + 8p \\ Q_d = Q_s \end{cases}$$ Sabiendo que $p(0) = 6$ y $p'(0) = 4$

$$42 - 4p - 4p' + p'' = -6 + 8p$$

Reacomodando: $\boldsymbol{p''(t) - 4p'(t) - 12p(t) = -48}$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

$p_H(t) = e^{rt} \rightarrow p'_H(t) = re^{rt} \rightarrow p''_H(t) = r^2e^{rt}$

Reemplazamos: $r^2e^{rt} - 4re^{rx} - 12e^{rx} = 0$ → $r^2 - 4r - 12 = 0$. Raíces de la ecuación característica: $r_1 = 6\ r_2 = -2$

Planteo de la solución homogénea: $\boldsymbol{p_H(t) = C_1e^{6t} + C_2e^{-2t}}$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria: Método de los coeficientes indeterminados

Planteamos la complementaria, sabiendo que $g(t) = -48$

$$p_c = A$$
$$p'_c = 0$$
$$p''_c = 0$$

$$0 - 4.0 - 12A = -48 \quad \rightarrow \quad A = 4$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$\boldsymbol{p(t) = p_h + p_c = C_1e^{6t} + C_2\ e^{-2t} + 4}$$ → **SOLUCIÓN GENERAL**

Paso 4– Hallar la solución particular a partir de las condiciones iniciales

Sabiendo que $p(0) = 6$ y $p'(0) = 4$ calculamos los valores de C_1 y C_2

$$p(0) = C_1 + C_2 + 4 = 6$$

$$p' = 6C_1e^{6t} - 2C_2\ e^{-2t}$$
$$p'(0) = 6C_1 - 2C_2 = 4 \rightarrow C_1 = \frac{4}{6} + \frac{2}{6}C_2$$

$$\frac{4}{6} + \frac{2}{6}C_2 + C_2 + 4 = 6 \rightarrow C_2 = 1 \text{ y } C_1 = 1$$

$$\boldsymbol{p(t) = e^{6t} + e^{-2t} + 4}$$ → **SOLUCIÓN PARTICULAR**

Precio de equilibrio

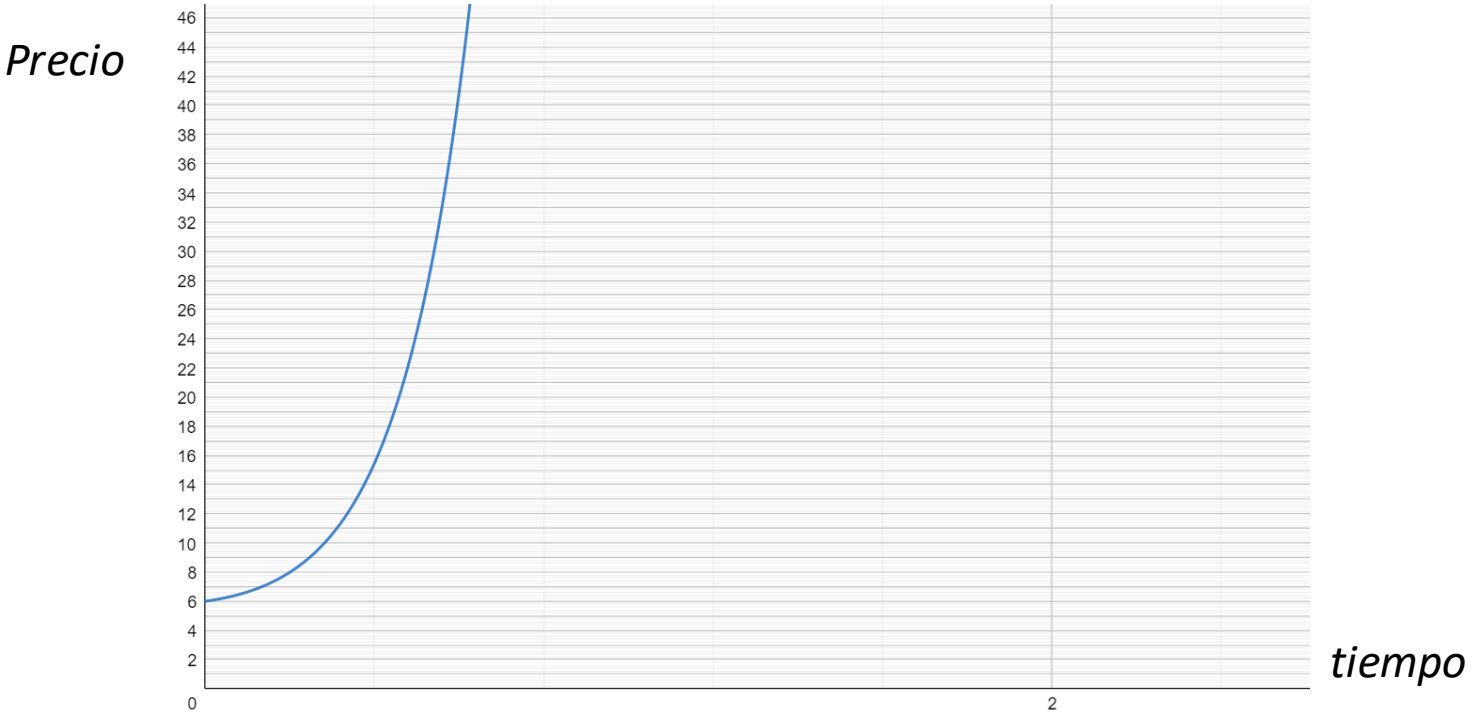
Paso 5 – Evaluar la Trayectoria Del Precio

Paso 5 – Evaluar la Trayectoria Del Precio

Comportamiento dinámico del precio: $p(t) = e^{6t} + e^{-2t} + 4$ **Trayectoria del precio**

Puedo saber que la solución es inestable porque por lo menos una de sus raíces es no negativa.
El modelo presenta una trayectoria explosiva, es decir, es dinámicamente inestable

¿Qué significa que la solución es inestable (dinámicamente inestable)?
En este modelo, si por algún shock exógeno el precio se mueve del equilibrio el precio ya NO va a converger al equilibrio, ya que su solución es dinámicamente inestable.



Ejemplo :

Dado el siguiente modelo de mercado:

$$\begin{cases} Q_d = 40 - 2P - 2P' - P'' \\ Q_s = -5 + 3P \\ Q_d = Q_s \end{cases}$$

Con $P(0) = 12$ y $P'(0) = 1$, encuentre $P(t)$

$$40 - 2P - 2P' - P'' = -5 + 3P \xrightarrow{\text{reordenando}} P'' + 2P' + 5P = 45$$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

$$P'' + 2P' + 5P = 0$$

$$p_H(t) = e^{rt} \rightarrow p'_H(t) = re^{rt} \rightarrow p''_H(t) = r^2e^{rt}$$

$$r^2e^{rt} + 2re^{rt} + 5e^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(r^2 + 2r + 5) = 0$$

$$r_1; r_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 * 5}}{2} \longrightarrow r_1; r_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} \longrightarrow \boxed{r_1; r_2 = -1 \pm 2i}$$

$$\boldsymbol{p_h = e^{-1t}[Asen(2t) + Bcos(2t)]}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria: Método de los coeficientes indeterminados

$$P'' + 2P' + 5P = 45$$

Planteamos la complementaria, sabiendo que $g(t) = 45$

$$p_c = A$$
$$p'_c = 0$$
$$p''_c = 0$$

$$0 + 2.0 + 5A = 45 \quad \rightarrow \quad A = 9$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$\boldsymbol{p_g = e^{-1t}[Asen(2t) + Bcos(2t)] + 9} \quad \rightarrow \textbf{SOLUCIÓN GENERAL}$$

Paso 4– Hallar la solución particular a partir de las condiciones iniciales

Con $P(0) = 12$ y $P'(0) = 1$

$$\boldsymbol{P(t) = e^{-1t}[Asen(2t) + Bcos(2t)] + 9} \longrightarrow \boldsymbol{P(0) = e^{-1*0}[Asen(2*0) + Bcos(2*0)] + 9}$$

$$\boldsymbol{P'(t) = -1 * e^{-1t}[Asen(2t) + Bcos(2t)] + e^{-1t}[2Acos(2t) - 2Bsen(2t)]}$$

$$\boldsymbol{P'(0) = -1 * e^{-1*0}[Asen(2*0) + Bcos(2*0)] + e^{-1*0}[2Acos(2*0) - 2Bsen(2*0)]}$$

$$P(0) = e^{-1*0}[Asen(2*0) + Bcos(2*0)] + 9$$

$$P'(0) = -1 * e^{-1*0}[Asen(2*0) + Bcos(2*0)] + e^{-1*0}[2Acos(2*0) - 2Bsen(2*0)]$$

$$P(0) = 1[0 + B1] + 9 \longrightarrow 12 = B + 9 \rightarrow B = 3$$

$$P'(0) = -1 * 1[0 + B1] + 1[2A1 - 0] \longrightarrow 1 = -3 + 2A \rightarrow A = 2$$

$$P_P = e^{-1t}[2sen(2t) + 3cos(2t)] + 9$$ → **SOLUCIÓN PARTICULAR**

Precio de equilibrio

Paso 5 – Evaluar la Trayectoria Del Precio

Obviamente que esta trayectoria de tiempo tiene fluctuación periódica; el periodo es $2\pi/\beta = \pi$. Es decir, se da un ciclo completo cada vez que t se incrementa por $\pi = 3.14159\ldots$ En vista del término multiplicativo e^{-t}, la fluctuación se amortigua. La trayectoria de tiempo, que inicia desde el precio inicial $P(0) = 12$, converge hasta el precio de equilibrio intertemporal $P_p = 9$ de una manera cíclica.

Otro Ejemplo

$$\begin{cases} Q_d = 18 - 2p + 2p' + 6p'' \\ Q_s = -2 + 8p - 2p' + 10p'' \\ Q_d = Q_s \end{cases}$$

La EDO que define al modelo está dada por:

$$18 - 2p + 2p' + 6p'' = -2 + 8p - 2p' + 10p''$$

Reacomodando:

$$4p'' - 4p' + 10p = 20$$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

$$4{p''}_h - 4{p'}_h + 10p_h = 0$$

Y su correspondiente ecuación característica:

$4r^2 - 4r + 10 = 0$ que presenta $r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}i$

Entonces:

$$\boldsymbol{p_h = e^{\frac{1}{2}t}\left[Asen\left(\frac{3}{2}t\right) + Bcos\left(\frac{3}{2}t\right)\right]}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria: Método de los coeficientes indeterminados

Ahora, planteamos la complementaria, sabiendo que $g(t) = 20$

$$p_c = A$$
$$p'_c = 0$$
$$p''_c = 0$$
$$4.0 - 4.0 + 10A = 20 \quad \rightarrow \quad A = 2$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$p(t) = p_h + p_c = e^{\frac{1}{2}t}\left[Asen\left(\frac{3}{2}t\right) + Bcos\left(\frac{3}{2}t\right)\right] + 2$$ → **SOLUCIÓN GENERAL**

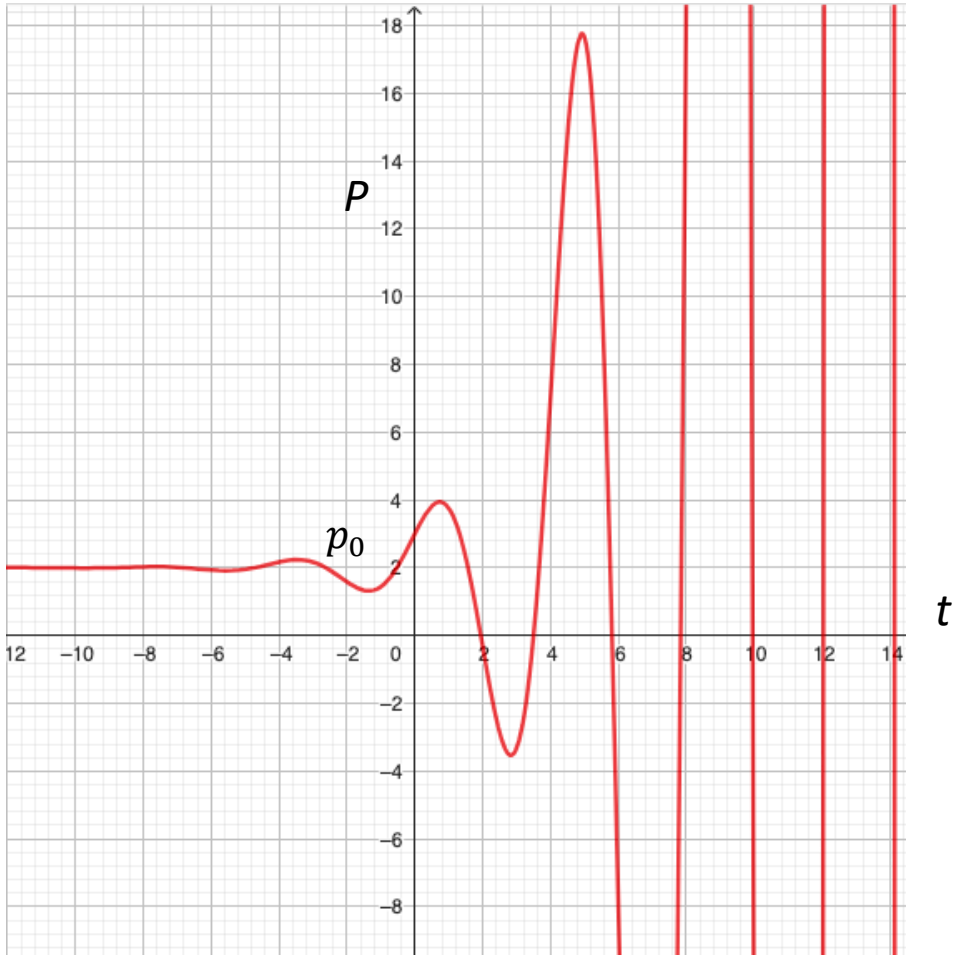
Paso 4– Hallar la solución particular a partir de las condiciones iniciales

No es posible debido a que no fueron proporcionadas las condiciones iniciales del problema

Paso 5 – Evaluar la Trayectoria Del Precio

$$p(t) = p_h + p_c = e^{\frac{1}{2}t}\left[Asen\left(\frac{3}{2}t\right) + Bcos\left(\frac{3}{2}t\right)\right] + 2$$

Considerando A=B=1

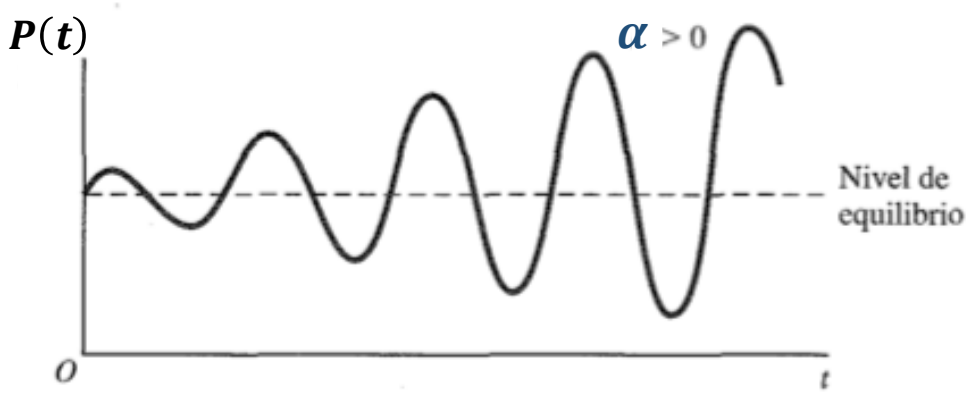


Trayectoria de tiempo para funciones circulares

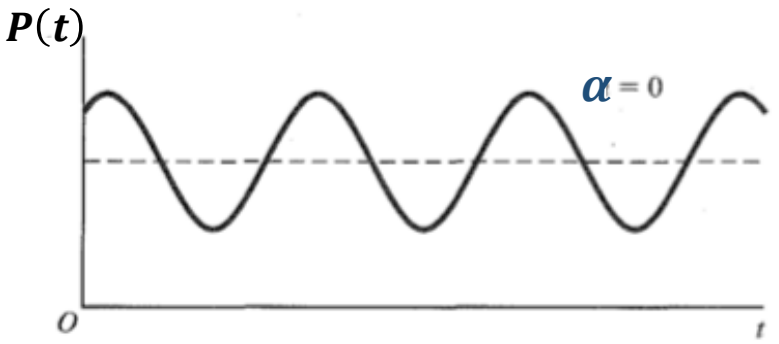
$$P(t) = e^{\alpha t}(C_1 sen(\beta t) + C_2 \cos(\beta t)) + sc$$

Precio de equilibrio

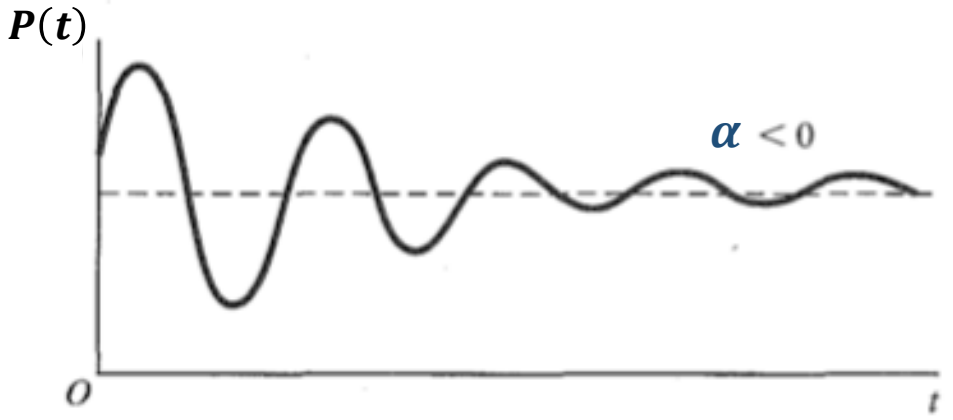
Si $\alpha > 0$, el valor de $e^{\alpha t}$ va a incrementarse continuamente a medida que t se incrementa. Esto va a producir un efecto amplificador sobre la amplitud de $(C_1 sen(\beta t) + C_2 \cos(\beta t))$ y causa desviaciones cada vez mayores respecto al equilibrio para cada ciclo sucesivo. La trayectoria de tiempo va a caracterizarse en este caso por una **fluctuación explosiva.**



Si $\alpha = 0$, entonces $e^{\alpha t} = 1$, y la función complementaria será simplemente $(C_1 sen(\beta t) + C_2 \cos(\beta t))$, la cual tiene una amplitud constante. En este segundo caso, cada ciclo va a exhibir un patrón uniforme de desviación respecto al equilibrio. Esta es una trayectoria de tiempo con **fluctuación uniforme.**



Si α <0, el término $e^{\alpha t}$ va a disminuir continuamente a medida que t se incrementa, y cada ciclo sucesivo tendrá una amplitud menor que el anterior, de la misma manera que una ola va desvaneciéndose. Este caso la trayectoria de tiempo se caracteriza por una **fluctuación amortiguada.**



En los tres diagramas vistos, se supone que el equilibrio intertemporal es estacionario. Si es móvil, los tres tipos de trayectoria de tiempo van a fluctuar alrededor de aquél, pero puesto que un equilibrio móvil generalmente se grafica como una curva en vez de una línea recta horizontal, la fluctuación va a adoptar la naturaleza de una serie de ciclos de negocios alrededor de una tendencia secular.

$$P(t) = e^{\alpha t}(C_1 sen(\beta t) + C_2 \cos(\beta t)) + sc$$

Examinemos primero el término $C_2 \cos(\beta t)$. Por sí misma, la expresión $\cos(\beta t)$ es una función circular de (βt) , con periodo 2π (=6.2832) y amplitud 1. El periodo de 2π significa que la gráfica va a repetir su configuración cada vez que (βt) se incremente por 2π. Sin embargo, cuando *t* sola se toma como la variable independiente, la repetición ocurre cada vez que *t* se incrementa por $2\pi/\beta$, *de* modo que con referencia a *t* — como es apropiado en el análisis económico dinámico— consideraremos que el periodo de $\cos(\beta t)$ es de $2\pi/\beta$ (sin embargo, la amplitud permanece como 1).

Ahora, cuando se agrega una constante multiplicativa C_2 a $\cos(\beta t)$, esto hace que la imagen de fluctuación cambie de ±1 a ± C_2 . Entonces la amplitud se transforma ahora en C_2 , aun cuando el periodo no esté afectado por esta constante.
En resumen, $C_2 \cos(\beta t)$ es una función coseno de ***t***, con periodo $2\pi/\beta$ y amplitud C_2. Por la misma razón, $C_1 sen(\beta t)$ es una función seno de ***t*** , con periodo $2\pi/\beta$ y amplitud C_1

Equilibrio estacionario vs equilibrio móvil

Consideremos diferentes variantes del modelo visto anteriormente

$$P'' + 2P' + 5P = 40e^{3t}$$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada

$\boldsymbol{p_h = e^{-1t}[Asen(2t) + Bcos(2t)]}$ ⟶ **Solución homogénea**

Paso 2 – Hallar la solución complementaria: Método de los coeficientes indeterminados

Ahora, planteamos la complementaria, sabiendo que $g(t) = 40e^{3t}$

$$p_c = Ae^{3t}$$
$$p'_c = 3Ae^{3t}$$
$$p''_c = 9Ae^{3t}$$
$$9Ae^{3t} + 2.3Ae^{3t} + 5Ae^{3t} = 40e^{3t}$$
$$Ae^{3t}(9 + 6 + 5) = 40e^{3t} \longrightarrow A = 2 \rightarrow \boldsymbol{PC = 2e^{3t}}$$

Paso 3 – Armar la solución general ⟶ $\boldsymbol{p_g = e^{-1t}[Asen(2t) + Bcos(2t)] + 2e^{3t}}$

Paso 4– Hallar la solución particular a partir de las condiciones iniciales

Con $P(0) = 12$ y $P'(0) = 1$

$$P(t) = e^{-1t}[Asen(2t) + Bcos(2t)] + 2e^{3t} \longrightarrow P(0) = e^{-1*0}[Asen(2*0) + Bcos(2*0)] + 2e^{3*0}$$

$$P'(t) = -1 * e^{-1t}[Asen(2t) + Bcos(2t)] + e^{-1t}[2Acos(2t) - 2Bsen(2t)] + 6\,e^{3t}$$

$$\longrightarrow P'(0) = -1 * e^{-1*0}[Asen(2*0) + Bcos(2*0)] + e^{-1*0}[2Acos(2*0) - 2Bsen(2*0)] + 6\,e^{3*0}$$

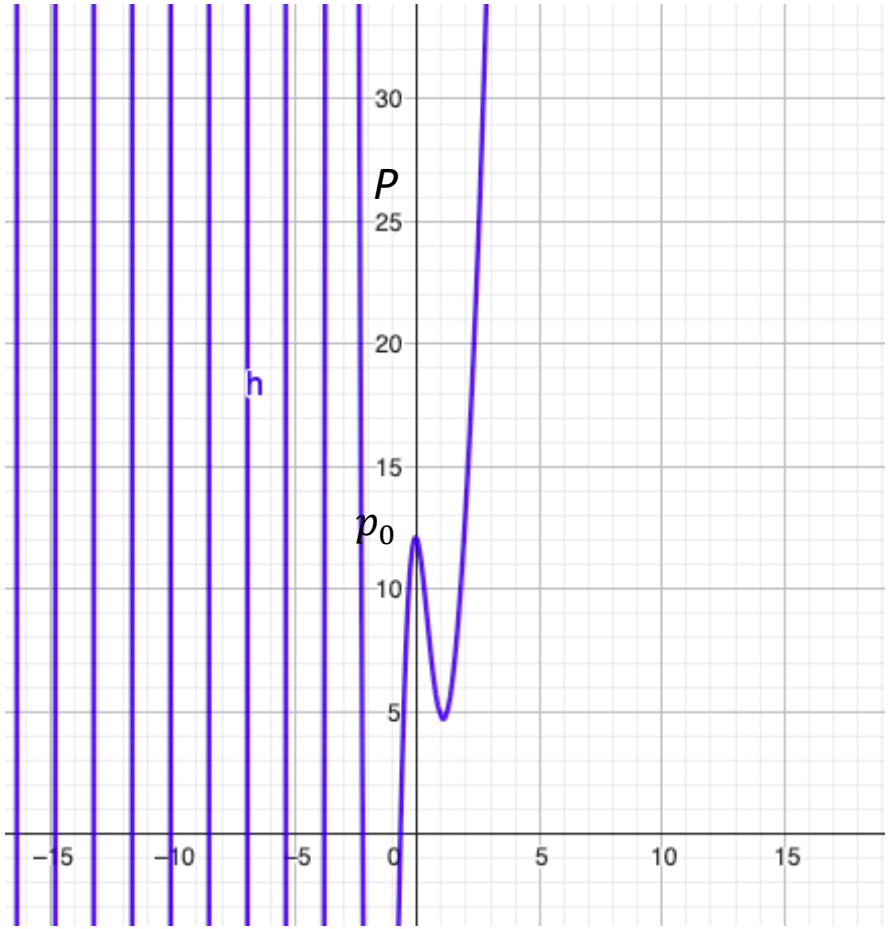
$$P(0) = 1[0 + B1] + 2 \qquad 12 = B + 2 \rightarrow B = 10$$

$$P'(0) = -1 * 1[0 + B1] + 1[2A1 - 0] + 6 \qquad 1 = -10 + 2A + 6 \rightarrow A = \frac{5}{2}$$

$$P_P = e^{-1t}\left[\frac{5}{2}sen(2t) + 10cos(2t)\right] + 2e^{3t}$$

Paso 5 – Evaluar la Trayectoria Del Precio

$$P_P = e^{-1t}\left[\frac{5}{2}sen(2t) + 10cos(2t)\right] + 2e^{3t}$$



Ejercicios del libro : Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 16

Ejercicios Adicionales:

1- Si $\frac{d^2p}{dt^2} = B\,r_0 + BA\left(\frac{dp}{dt} - p\right)$, donde p es el precio y A, B y r_0 son constantes positivas; encuentre la solución $p = f(t)$ y el comportamiento límite de esa solución para los siguientes casos:

a) $BA = 1$ **b)** $BA = \frac{1}{2}$ **c)** $BA = 2$ **d)** $BA = \frac{3}{4}$

2- Al estudiar el modelo econométrico de Phillips se presenta la ecuación diferencial $\frac{d^2Y}{dt^2} + a\frac{dY}{dt} + bY = c\,g(t)$ donde a, b y c son constantes no nulas de significado económico. Encuentre la solución $Y = f(t)$ en los siguientes casos:

a) $g(t) = K$, con K constante no nula.
b) $g(t) = m + n\,t$, con m y n constantes no nulas.
c) $g(t) = A_0\,e^{k\,t}$, con A_0 y k constantes no nulas.
d) $g(t) = 0$, con $a = 1$ y $b = 1$.
e) $g(t) = 0$, con $a = 1$ y $b = \frac{1}{4}$.

3- El estudio de un modelo de Samuelson sobre inversiones requiere la solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2I}{dt^2} = -m\,I$ con $m > 0$, encuentre $I = f(t)$.

4- Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de orden superior a 2.

a) $\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} = 0$

b) $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0$

c) $y''' + y'' = 8x^2$

d) $y''' + 4y' = 3e^x$

Respuestas ejercicios adicionales

1-

a) $p = f(t) = e^{\frac{t}{2}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2} + C_2\, sen\frac{\sqrt{3}\,t}{6}\right) + \frac{r_0}{A}$, diverge.

b) $p = f(t) = e^{\frac{t}{4}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{7}\,t}{4} + C_2\, sen\frac{\sqrt{7}\,t}{4}\right) + \frac{r_0}{A}$, diverge.

c) $p = f(t) = e^{t}\left(C_1 \cos t + C_2\, sen\, t\right) + \frac{r_0}{A}$, diverge.

d) $p = f(t) = e^{\frac{3t}{8}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{39}\,t}{8} + C_2\, sen\frac{\sqrt{39}\,t}{8}\right) + \frac{r_0}{A}$, diverge.

2- En los casos **a)**, **b)** y **c)** la solución de la homogénea correspondiente, será de acuerdo a los valores de las constantes económicas a y b. Si:

$$a^2 - 4b > 0 \Rightarrow Y_H = C_1\, e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}t} + C_2\, e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}t}$$

$$a^2 - 4b = 0 \Rightarrow Y_H = e^{-\frac{a\,t}{2}}\left(C_1 + C_2\, t\right)$$

$$a^2 - 4b < 0 \Rightarrow Y_H = e^{-\frac{a\,t}{2}}\left(C_1 \cos\frac{t\sqrt{4b-a^2}}{2} + C_2\, sen\frac{t\sqrt{4b-a^2}}{2}\right)$$

2-

Como la solución general $Y(t)$ buscada en cada caso, es la suma de la homogénea Y_H y la particular propuesta Y_{pp}. La solución será:

a) $Y_{pp} = \dfrac{c\,k}{b} \Rightarrow Y(t) = Y_H + \dfrac{c\,k}{b}$

b) $Y_{pp} = \dfrac{c\,n}{b}t + \dfrac{c}{b}\left(m - \dfrac{n}{b}\right) \Rightarrow Y(t) = Y_H + \dfrac{c\,n}{b}t + \dfrac{c}{b}\left(m - \dfrac{n}{b}\right)$

c) Si $a^2 - 4b > 0 \wedge k \neq \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$: $\quad Y_{pp} = \dfrac{c\,A_0\,e^{k\,t}}{k^2 + ak + b} \Rightarrow Y(t) = Y_H + \dfrac{c\,A_0\,e^{k\,t}}{k^2 + ak + b}$

Si $a^2 - 4b > 0 \wedge k = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$: $\quad Y_{pp} = \dfrac{c\,A_0\,t\,e^{k\,t}}{2k + a} \Rightarrow Y(t) = Y_H + \dfrac{c\,A_0\,t\,e^{k\,t}}{2k + a}$

Si $a^2 - 4b = 0 \wedge k \neq -\dfrac{a}{2}$: $\quad Y_{pp} = \dfrac{c\,A_0\,e^{k\,t}}{k^2 + ak + b} \Rightarrow Y(t) = Y_H + \dfrac{c\,A_0\,e^{k\,t}}{k^2 + ak + b}$

Si $a^2 - 4b = 0 \wedge k = -\dfrac{a}{2}$: $\quad Y_{pp} = \dfrac{c\,A_0\,t^2 e^{-\frac{a}{2}t}}{2} \Rightarrow Y(t) = Y_H + \dfrac{c\,A_0\,t^2 e^{-\frac{a}{2}t}}{2}$

Si $a^2 - 4b < 0$, $\forall k$: $Y_{pp} = \dfrac{c\,A_0\,e^{k\,t}}{k^2 + ak + b} \Rightarrow Y(t) = Y_H + \dfrac{c\,A_0\,e^{k\,t}}{k^2 + ak + b}$

d) $Y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(C_1 \cos\dfrac{\sqrt{3}\,t}{2} + C_2\, sen\dfrac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)$

e) $Y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(C_1 + C_2\,t\right)$

3- $$I(t) = C_1 \cos \sqrt{m}t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{m}t$$

4-

a) $$y = C_1 + \frac{C_2}{5} e^{5x} - C_3 e^{-x}$$

b) $$y = C_1 + C_2 x + e^{-x}\left(C_3 + C_4 x\right)$$

c) $$y = C_1 x - C_2 e^{-x} + \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2 + C_3$$

d) $$y = \frac{1}{2}C_1 \operatorname{sen} 2x - \frac{C_2}{2}\cos 2x + \frac{3}{5}e^x + C_3$$

Sistemas de Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Material complementario

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 19

Prof.: Rita Beatriz Morrone

Sistema de ecuaciones diferenciales lineales

Un sistema de ecuaciones diferenciales consta de dos o más ecuaciones diferenciales en las cuales están incluidas dos o más funciones incógnita.

La solución del sistema estará dada por dos o más funciones que satisfagan simultáneamente a todas las ecuaciones del sistema.

Si las ecuaciones son lineales, para que el sistema tenga solución, el número de ecuaciones debe ser igual al número de funciones incógnita.

Sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Una solución del sistema es un conjunto de funciones diferenciables $\{x_1(t); x_2(t); \ldots; x_n(t)\}$ definido en un intervalo I, que satisface todas las ecuaciones de manera simultánea.

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Resolución por ecuación eliminante

Se aplica para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes o variables, homogéneos o no homogéneos.

El procedimiento consiste en obtener a través de métodos algebraicos una sola ecuación con una sola función incógnita, llamada ecuación eliminante, que resulta de igual o menor orden que el orden del sistema.

Resolución de sistemas lineales cuadrados por matriz de operadores

Se expresa cada ecuación del sistema por polinomios operadores (D) aplicados a cada función incógnita.

$$D = y_t'$$
$$D^2 = y_t''$$
$$D^n = y_t^n$$

Luego se expresa el sistema en forma matricial, donde la matriz del sistema es una función de operadores $G(D)$.

$$G(D)Y = A$$

A partir de allí en primer lugar se resuelve el sistema homogéneo asociado, luego se obtiene la solución complementaria dependiendo del carácter del término independiente para finalmente obtener la solución

Resolución de sistemas lineales cuadrados por matriz de operadores

Ejemplo 1: ***Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:***

$$\begin{cases} y'(t) = -ay(t) - bx(t) + c \\ x'(t) = -dy(t) - ex(t) + f \end{cases}$$

Expresión matricial

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -d & -e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y'(t) = A\,Y(t) + d(t)}$$

Procedimiento para hallar la solución a través de la matriz de operadores

Paso 1 – Hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo asociado $G(D)X = \theta$.

$$y'(t) + ay(t) + bx(t) = 0$$
$$x'(t) + dy(t) + ex(t) = 0$$

$$\begin{bmatrix} D + a & b \\ d & D + e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$G(D)$ es la matriz nxn de los polinomios operadores del sistema

vector columna de las funciones incógnita

El polinomio característico viene dado por $|G(D)|$ y la ecuación característica por $|G(D)| = 0$. El número de soluciones (autovalores) linealmente independiente del sistema está dado por el grado de la ecuación característica.

Ya que se trata de un sistema homogéneo y se desea que la solución sea diferente de la trivial, se busca que sea SCI
Por propiedad de sistemas homogéneos, si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero, dicho sistema lo será. De esta manera se desarrolla su determinante y se iguala a cero para obtener la ecuación característica.

$$\begin{vmatrix} D+a & b \\ d & D+e \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación Característica

$$(D+a)(D+e) - bd = 0$$
$$D^2 + eD + aD + ae - bd = 0$$
$$D^2 + (e+a)D + (ae - bd) = 0$$

$$\boldsymbol{D^2 + (e+a)D + (ae - bd) = 0}$$

Se obtienen las raíces y se evalúan

$$r_1; r_2 = \frac{-(e+a) \pm \sqrt{(-(e+a))^2 - 4(ae-bd)}}{2}$$

$si\ \left(-(e+a)\right)^2 > 4(ae-bd) \rightarrow\rightarrow\rightarrow$ *Raíces reales distintas* $\rightarrow$ $y_t^h = C1\ e^{r1t}\ k1 + C2\ e^{r2t}\ k2$

$si\ \left(-(e+a)\right)^2 = 4(ae-bd) \rightarrow\rightarrow\rightarrow$ *Raíces reales iguales* $\rightarrow$ $y_t^h = C1\ e^{r1t}\ k1 + C2\ e^{r2t}\ t\ k2$

$si\ \left(-(e+a)\right)^2 < 4(ae-bd) \rightarrow\rightarrow\rightarrow$ *Raíces complejas conjugadas* $\rightarrow$ $y_t^h = C1\ e^{\alpha t}(M\ \mathrm{sen}(\beta t)\ k1 + N\ \cos(\beta t)\ k2)$

Notar que las expresiones contienen $k1$ y $k2$. Se corresponden con los autovectores del sistema y las raíces con los autovalores

Método para hallar los autovectores (se pueden hallar por método de los adjuntos o resolviendo el sistema) :

Se obtiene $Adj\ G(r1)^T$ y se toma cualquier columna

Se reemplaza D por la raíz

Se transpone

Se obtienen los cofactores adjuntos

$$\begin{bmatrix} D+a & b \\ d & D+e \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r1+a & b \\ d & r1+e \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r1+a & d \\ b & r1+e \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{r1+e} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-d} & \boldsymbol{r1+a} \end{bmatrix}$$

$Adj\ G(r1)^T$

Autovectores:
(Se puede utilizar cualquiera de estos)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{r1+e} \\ \boldsymbol{-d} \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} -b \\ r1+a \end{bmatrix}$$

Se obtiene $Adj\ G(r2)^T$ y se toma cualquier columna

Se reemplaza D por la raíz

Se transpone

Se obtienen los cofactores adjuntos

$$\begin{bmatrix} D+a & b \\ d & D+e \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r2+a & b \\ d & r2+e \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r2+a & d \\ b & r2+e \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{r2+e} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-d} & \boldsymbol{r2+a} \end{bmatrix}$$

$Adj\ G(r2)^T$

Autovectores:
(Se puede utilizar cualquiera de estos)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{r2+e} \\ \boldsymbol{-d} \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} -b \\ r2+a \end{bmatrix}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria dependiendo del carácter del término independiente

Si el sistema está igualado a términos independientes constantes, el sistema en forma matricial se puede expresar como $G(D)Y = K$.

Si no hay raíz nula, se ensaya la solución particular $\boldsymbol{Y_C = A}$ Reemplazando, se tiene que $G(D)A = K$. Teniendo en cuenta la Propiedad de que $\boldsymbol{G(D)A=G(0)A}$ se puede deducir que $\boldsymbol{A= G(0)^{-1}\, K = Y_C}$ es la solución completa.

$$Buscamos: \quad G(0)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \rightarrow\rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{e}{(ae-bd)} & \dfrac{-b}{(ae-bd} \\ \dfrac{-d}{(ae-bd)} & \dfrac{a}{(ae-bd)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A= G(0)^{-1}\, K}$$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{e}{(ae-bd)} & \dfrac{-b}{(ae-bd} \\ \dfrac{-d}{(ae-bd)} & \dfrac{a}{(ae-bd)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{ec-bf}{ae-bd} \\ \dfrac{af-dc}{ae-bd} \end{bmatrix}$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{C1}\ e^{\boldsymbol{r1}t} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r1}+\boldsymbol{e} \\ -\boldsymbol{d} \end{bmatrix} + \boldsymbol{C2}\ e^{\boldsymbol{r2}t} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r2}+\boldsymbol{e} \\ -\boldsymbol{d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\boldsymbol{ec-bf}}{\boldsymbol{ae-bd}} \\ \dfrac{\boldsymbol{af-dc}}{\boldsymbol{ae-bd}} \end{bmatrix}$$

Estabilidad de la solución

Se dice que la solución del sistema de ecuaciones diferenciales es estable si la solución homogénea tiende a cero a medida que la variable independiente tiende a infinito.
Si se cumple esta condición de estabilidad, la solución general tiende a la solución completa, también llamada solución de equilibrio.

Notar que para que esto suceda la totalidad de las raíces deben ser negativas
En el caso de la solución con raíces complejas conjugadas, la parte real del de la raíz compleja debe ser negativa

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, un punto de equilibrio (o punto fijo) es aquel donde se verifica:

$$x_1'(t) = x_2'(t) = \cdots = x_n'(t) = 0$$

Dado que las $x'_i(t)$ son definidas como los *sistemas de movimiento* o *funciones de transición*, sus valores para un punto en específico, $(x_1(t_0); \ldots; x_n(t_0))$, indican el movimiento del sistema en dicho punto.
El hecho de que, en un punto de equilibrio, cada derivada de primer orden esté igualada a cero indica que ninguna de las $x_i(t)$ varían en el tiempo; no hay movimiento en el sistema.
Si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto a cero, $|A| \neq 0$, el sistema tendrá un único *punto de equilibrio, estado de equilibrio* o *estado estacionario*, dado por la solución $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$.

Teorema 1. Asumiendo que $|A| \neq 0$, entonces el punto de equilibrio (x^*, y^*) para el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Es asintóticamente estable globalmente si y solo si

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} < 0 \quad \text{y} \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$$

O equivalentemente, si y solo si ambos auto valores de A tienen partes reales negativas.

Estas dos condiciones son análogas a la condición de que las dos raíces de la ecuación característica asociada al sistema sean negativas. Dichas raíces constituyen una parte fundamental de la solución homogénea para el sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Por otra parte, también se pueden evaluar los autovalores a partir de la matriz $A - \lambda I$ y su ecuación característica

$$|A - I\lambda| = 0$$

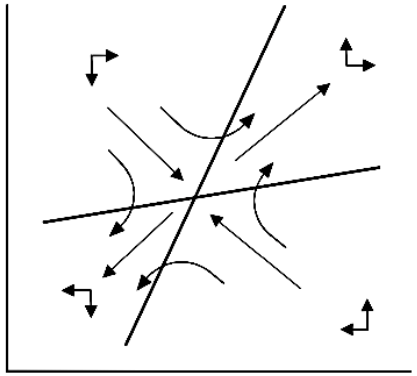
$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$$

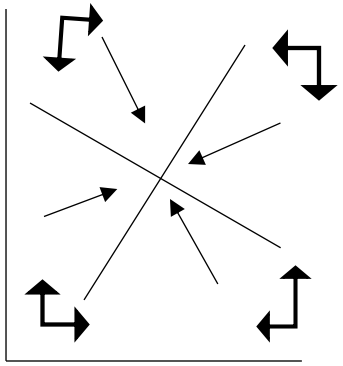
$$r_1, r_2 = \frac{tr(A) \pm \sqrt{tr(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

Tipología de equilibrios

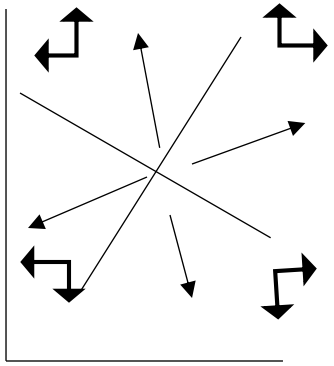
Caso	Raíces	Signo Det(A)	Signo TR(A)	Tipo de Equilibrio
$TR(A)^2 > 4\,Det(A)$	Reales Distintas	+	-	Nodo Estable
		+	+	Nodo Inestable
		-	+,0,-	Punto de Ensilladura
$TR(A)^2 = 4\,Det(A)$	Reales Iguales	+	-	Nodo Estable
		+	+	Nodo Inestable
$TR(A)^2 < 4\,Det(A)$	Imaginarias	+	-	Foco Estable
		+	+	Foco Inestable
		+	0	Vórtice



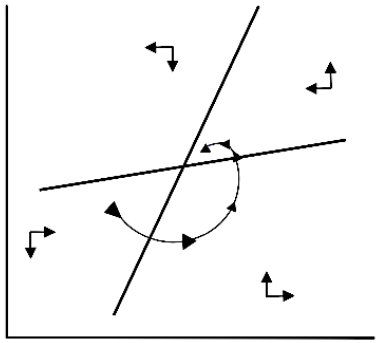
Punto silla



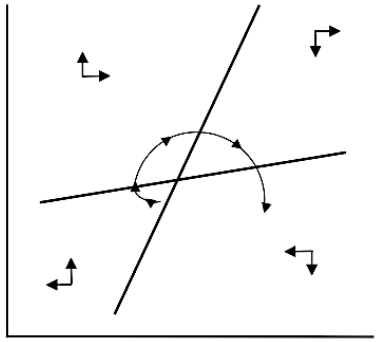
Nodo estable



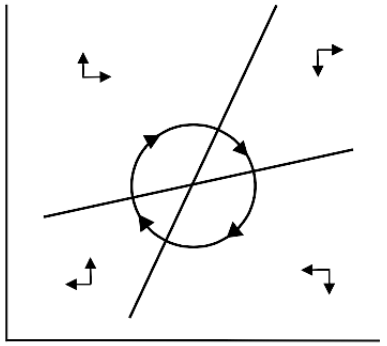
Nodo inestable



Foco estable



Foco inestable



vórtice

Diagrama de fases

Dado un sistema de dos ecuaciones diferenciales, es posible realizar un análisis cualitativo. Notar que las derivadas respecto al tiempo $x'(t)$ y $y'(t)$ dependen sólo de x y y, mientras que la variable t no interviene en las funciones f y g como un argumento separado. Esta característica, que convierte al sistema un *sistema autónomo*

$$x'(t) = f(x, y)$$
$$y'(t) = g(x, y)$$

Muestra aspectos cualitativos: los relacionadas con la ubicación y la estabilidad dinámica del(os) equilibrio(s) intertemporal(es)

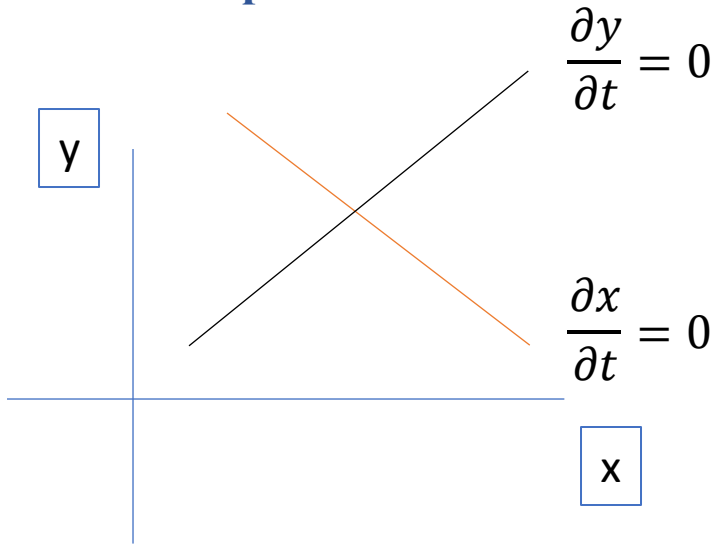
Se busca determinar la dirección del movimiento de la(s) variable(s) respecto al tiempo.

Paso 1 – Identificar las curvas de demarcación

Se obtienen igualando a cero ambas derivadas

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \; ; \frac{\partial x}{\partial t} = 0$$

Otorgan todas las combinaciones de x e y donde no hay movimiento
Su intersección indica el o los equilibrios intertemporales del sistema



Es importante identificar los ejes y con las variables **x** e **y** en cuestión

Diagrama de fases

Paso 2 – Identificar los movimientos de las derivadas fuera de las curvas de demarcación

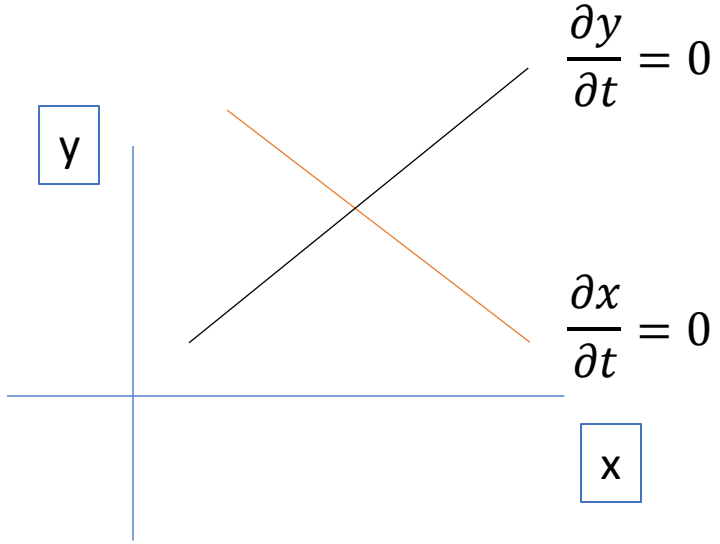
Se evalúan los signos de las siguientes derivadas:

$$\frac{x_t'}{x} \quad o \quad \frac{x_t'}{y}$$

$$\frac{y_t'}{y} \quad o \quad \frac{y_t'}{x}$$

Es importante obtener el signo de 1 de cada grupo
Luego en función de los signos se determinan las flechas que reflejan la dinámica para las 4 zonas de fase.

Se busca determinar la dirección del movimiento de la(s) variable(s) respecto al tiempo.



Análisis de estabilidad del ejemplo 1:

Situación 1 – considere que **ae > bd** y **af > cd**

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= -ay(t) - bx(t) + c \\ x'(t) &= -dy(t) - ex(t) + f \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y'(t) &= 0 \\ x'(t) &= 0 \end{aligned}$$

Realizando un diagrama de fases

$$\boldsymbol{de\ y'(t) = 0} \qquad \boldsymbol{y(t) = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}x(t)}$$

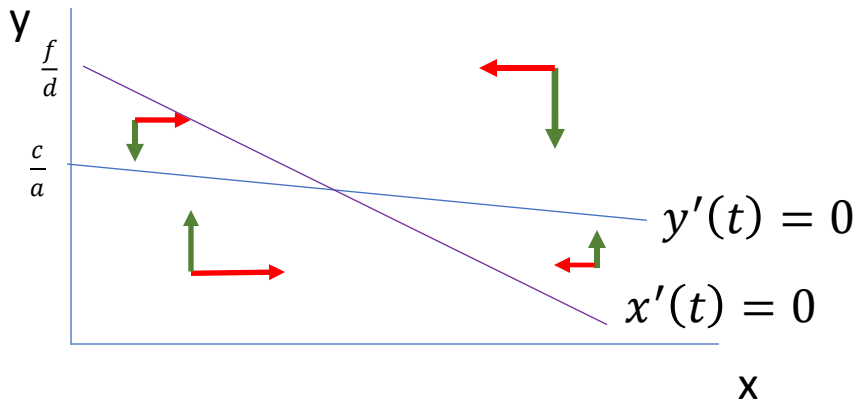
$$\boldsymbol{de\ x'(t) = 0} \qquad \boldsymbol{y(t) = \frac{f}{d} - \frac{e}{d}x(t)}$$

$$\frac{e}{d} > \frac{b}{a}$$

$$\frac{f}{d} > \frac{c}{a}$$

$$\frac{\dot{y}}{x} = -b$$

$$\frac{\dot{x}}{y} = -d$$



Evaluando la Matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -d & -e \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -a - \lambda & -b \\ -d & -e - \lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$|A - \lambda I| = (-a - \lambda) * (-e - \lambda) - bd = 0$$

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 + (a + e)\lambda + ae - bd = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-(a+e) \pm \sqrt{(a+e)^2 - 4(ae - bd)}}{2}$$

Sus autovalores son negativos

$$traza\ A = -a - e < 0$$
$$det = ae - bd > 0$$

¡¡¡Se concluye que la dinámica es convergente!!!

Situación 2 – considere que **ae < bd** y **af < cd**

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= -ay(t) - bx(t) + c \\ x'(t) &= -dy(t) - ex(t) + f \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y'(t) &= 0 \\ x'(t) &= 0 \end{aligned}$$

Realizando un diagrama de fases

$$\boldsymbol{de\ y'(t) = 0} \qquad \boldsymbol{y(t) = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}x(t)}$$

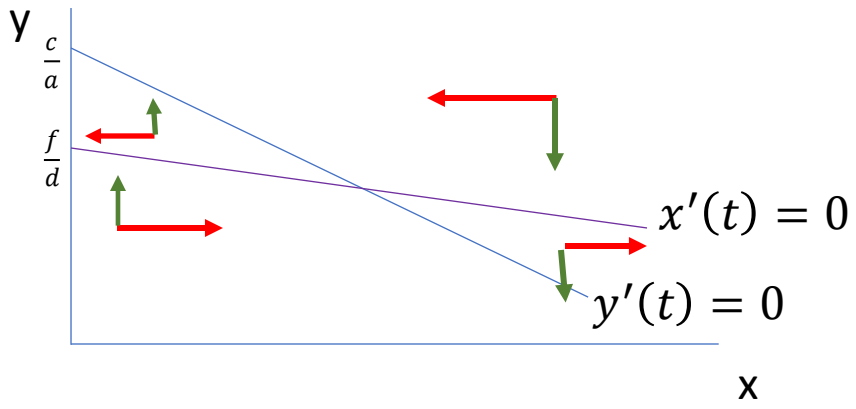
$$\boldsymbol{de\ x'(t) = 0} \qquad \boldsymbol{y(t) = \frac{f}{d} - \frac{e}{d}x(t)}$$

$$\frac{e}{d} < \frac{b}{a}$$

$$\frac{f}{d} < \frac{c}{a}$$

$$\frac{\dot{y}}{x} = -b$$

$$\frac{\dot{x}}{y} = -d$$



Evaluando la Matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -d & -e \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -a - \lambda & -b \\ -d & -e - \lambda \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 + (a + e)\lambda + ae - bd = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-(a + e) \pm \sqrt{(a + e)^2 - 4(ae - bd)}}{2}$$

Tiene un autovalor positivo y un autovalor negativo

$$traza\ A = -a - e < 0$$

$$det = ae - bd < 0$$

¡¡¡Punto silla!!!

Ejemplo 2:

Dado el modelo: $\begin{pmatrix} s' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ \pi\delta & \left[-\pi\left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right)\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ p \end{pmatrix}$

Notar que es un sistema homogéneo

sabiendo que $\pi\left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right) > 0$ y $\frac{\pi\delta}{\lambda} > 0$

Hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo $G(D)X = \theta$.

$$S' = \frac{1}{\lambda} P$$
$$P' = \pi\delta S - \pi\left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right) P$$

$$S' - \frac{1}{\lambda} P = 0$$
$$P' - \pi\delta S + \pi\left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right) P = 0$$

$$\begin{bmatrix} D & -\frac{1}{\lambda} \\ -\pi\delta & D + \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

¡¡¡Buscamos que sea SCI !!!

$$D[D + \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})] - \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$$
$$D^2 + \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})D - \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$$

$$r^2 + \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})r - \frac{\pi\delta}{\lambda} = 0$$

$$r1, r2 = \frac{-\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) \ +/- \sqrt{\left(\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})\right)^2 - 4.1.(-\frac{\pi\delta}{\lambda})}}{2} \quad \Rightarrow \quad r1, r2 = \frac{-\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) \ +/- \sqrt{\left(\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})\right)^2 + 4\frac{\pi\delta}{\lambda}}}{2}$$

Se buscan los autovectores K1, K2

Se obtiene Adj $G(r1)^T$ y se toma cualquier columna

$$\begin{bmatrix} r_1 & -\frac{1}{\lambda} \\ -\pi\delta & r_1 + \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) \end{bmatrix}. \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{r_1 + \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})} & \boldsymbol{\frac{1}{\lambda}} \\ \boldsymbol{\pi\delta} & \boldsymbol{r_1} \end{bmatrix}.$$

Se obtiene Adj $G(r2)^T$ y se toma cualquier columna

$$\begin{bmatrix} r_2 & -\frac{1}{\lambda} \\ -\pi\delta & r_2 + \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) \end{bmatrix}. \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{r_2 + \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})} & \boldsymbol{\frac{1}{\lambda}} \\ \boldsymbol{\pi\delta} & \boldsymbol{r_2} \end{bmatrix}.$$

En este caso, recordar que es un sistema homogéneo, por ende, la solución general es:

$$\begin{pmatrix} S_t \\ P_t \end{pmatrix} = C_1 e^{r_1 t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{r_1} \end{pmatrix} + C_2 e^{r_2 t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{r_2} \end{pmatrix}$$

Análisis de estabilidad:

$$r^2 + \underbrace{\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})}_{+}r - \underbrace{\frac{\pi\delta}{\lambda}}_{\substack{+ \\ -}} = 0$$

>0 <0

$$r1, r2 = \frac{-\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) \ +/- \sqrt{\left(\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})\right)^2 - 4.1.(-\frac{\pi\delta}{\lambda})}}{2}$$

$$r1, r2 = \frac{-\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) \ +/- \sqrt{\left(\pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda})\right)^2 + 4\frac{\pi\delta}{\lambda}}}{2}$$

Una raíz será positiva y otra será negativa

Por otro lado :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ \pi\delta & \left[-\pi\left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right)\right] \end{pmatrix}$$

$$traza = a_{11} + a_{22}$$

$$traza = 0 - \pi(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}) < 0$$

$$det = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

$$det = 0 - \frac{\pi\delta}{\lambda} < 0$$

¡¡¡¡Punto silla!!!!

Diagrama de fases:

$$S' = \frac{1}{\lambda} P$$
$$P' = \pi\delta S - \pi\left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right) P$$

$$S' = 0$$
$$P' = 0$$

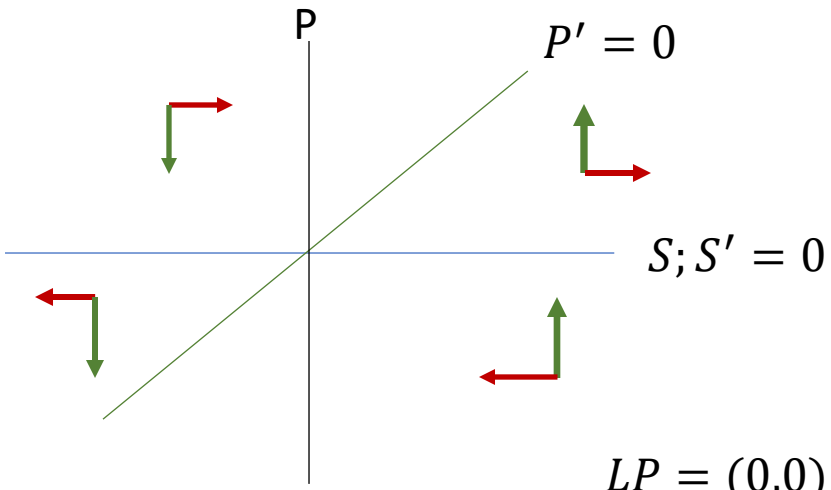
$$0 = \frac{1}{\lambda} P$$
$$0 = \pi\delta S - \pi\left(\delta + \frac{\sigma}{\lambda}\right) P$$

Despejo P en ambas:

$$P = 0$$
$$P = S\left(1 + \frac{\sigma}{\delta\lambda}\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial P'}{S} = \pi\delta > 0$$

$$\frac{\partial S'}{P} = \frac{1}{\lambda} > 0$$



Ejemplo 3 :

$$\text{Dado} \begin{cases} x'' - x - 2y = e^{2t} \\ x + y' + 2y = 3e^{t} \end{cases}$$

Se expresa el sistema en forma matricial, donde la matriz del sistema es una función de operadores $G(D)$

$$\begin{bmatrix} D^2 - 1 & -2 \\ 1 & D + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

$G(D)$ es la matriz nxn de los polinomios operadores del sistema

vector columna de las funciones incógnita

Notar que el vector de términos independientes está conformado por dos funciones de t exponenciales con diferente exponente, por ende, se expresa como la suma de dos términos, uno por cada exponencial asociado a un vector de coeficientes

Paso 1 – Hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo asociado $G(D)X = \theta$.

$$\begin{bmatrix} D^2-1 & -2 \\ 1 & D+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico viene dado por $|G(D)|$ y la ecuación característica por $|G(D)| = 0$. El número de soluciones (autovalores) linealmente independiente del sistema está dado por el grado de la ecuación característica.

Ya que se trata de un sistema homogéneo y se desea que la solución sea diferente de la trivial, se busca que sea SCI Por propiedad de sistemas homogéneos, si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero, dicho sistema lo será. De esta manera se desarrolla su determinante y se iguala a cero para obtener la ecuación característica.

$$\begin{vmatrix} D^2-1 & -2 \\ 1 & D+2 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación Característica

$$(D^2-1)(D+2)+2=0$$

$$D^3+2D^2-D=0 \quad \longleftrightarrow \quad r^3+2r^2-r=0$$

$$r_1 = 0\,;\quad r_2 = -1+\sqrt{2};\quad r_3 = -1-\sqrt{2}$$

Son raíces reales distintas

Se buscan los autovectores K1, K2, K3

Se obtiene Adj $G(0)^T$ y se toma cualquier columna

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj\ G(0)^T} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow K_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene Adj $G(-1+\sqrt{2})^T$ y se toma cualquier columna

Notar que se podía optar por cualquier columna. Son proporcionales

$$\begin{bmatrix} (-1+\sqrt{2})^2-1 & -2 \\ 1 & (-1+\sqrt{2})+2 \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj\ G(-1+\sqrt{2})^T} \begin{bmatrix} \mathbf{1+\sqrt{2}} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2-2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{K_2 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Se obtiene Adj $G(-1-\sqrt{2})^T$ y se toma cualquier columna

$$\boldsymbol{K_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2-2\sqrt{2} \end{pmatrix} = -(2-2\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} (-1-\sqrt{2})^2-1 & -2 \\ 1 & (-1-\sqrt{2})+2 \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj\ G(-1-\sqrt{2})^T} \begin{bmatrix} \mathbf{1-\sqrt{2}} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2+2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{K_3 = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{K_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix} = -(2+2\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}}$$

La solución del sistema homogéneo asociado es:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^H = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} e^{(-1+\sqrt{2})t} + C_3 \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} e^{(-1-\sqrt{2})t}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria dependiendo del carácter del término independiente

Si el término independiente es un vector de funciones exponenciales, se debe verificar en primer lugar si los exponentes son iguales o diferentes.

Si los **exponentes b son iguales** se expresa $G(D)Y = Ke^{bt}$
Si no hay raíz = b, se ensaya la solución particular $Y = Ae^{bt}$
Reemplazando se tiene que $G(D)A\ e^{bt} = K\ e^{bt}$.
Teniendo en cuenta la propiedad de que $G(D)A\ e^{bt} = G(b)A\ e^{bt}$ se deduce que $A = G(b)^{-1}K$ y la solución completa es
$y_c = G(b)^{-1}Ke^{bt}$

Si los exponentes b son diferentes se debe expresar la solución completa de manera tal que se tenga un término para cada e^{bt} y se debe hallar una solución particular para cada uno de ellos.
Para el caso de dos exponenciales distintas la solución será:
$y_c = G(b1)^{-1}K1e^{b1t} + G(b2)^{-1}K2e^{b2t}$

$$\begin{cases} x'' - x - 2y = e^{2t} \\ x + y' + 2y = 3e^{t} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} D^2 - 1 & -2 \\ 1 & D + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Notar que son diferentes exponentes por lo cual se debe buscar una solución particular para cada uno

Para un término b=2 que no es raíz de la solución homogénea y el vector de coeficientes es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para el otro término b=1 que no es raíz de la solución homogénea y el vector de coeficientes es $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{y_c = G(1)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{t} + G(2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}}$$

Primer término de la solución completa

$$G(1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad G(1)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, podemos hallar el valor de A, multiplicando a la inversa de la matriz de operadores valuada en b por el vector de constantes correspondiente:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{G(1)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{k} \quad \rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera, encontramos que la primera parte de la solución completa de este sistema será

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^{C} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} \qquad (a)$$

Segundo término de la solución completa

$$G(2) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad G(2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{17} \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{17} \\ -\frac{1}{14} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}}_{G(2)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{k} \quad \rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{-1}{14} \end{bmatrix}$$

Así, la segunda parte de la solución completa de este sistema de ecuaciones será

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^C = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{-1}{14} \end{bmatrix} e^{2t} \qquad (b)$$

$$y_c = G(1)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^t + G(2)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Sumando ambos términos (a) y (b) se obtiene la solución completa

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{-1}{14} \end{bmatrix} e^{2t}$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^G = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^H + \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^C$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^G = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} e^{(-1+\sqrt{2})t} + C_3 \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} e^{(-1-\sqrt{2})t} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{-1}{14} \end{bmatrix} e^{2t}$$

Se puede concluir que el sistema es inestable a partir del signo de las raíces, que son no negativas: $r_1 = 0$ y $r_2 > 0$

Ejemplo 4:

$$\begin{cases} x' + 2x + 3y = 0 \\ 3x + y' + 2y = 2e^{2t} \end{cases} \qquad con\ x(0) = 1; y(0) = -\frac{1}{7}$$

Paso 1 – Hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales homogéneo asociado $G(D)X = \theta$.

$$\begin{bmatrix} D+2 & 3 \\ 3 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} D+2 & 3 \\ 3 & D+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(D+2)(D+2) - 9 = 0$$

$$D^2 + 4D - 5 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad r^2 + 4r - 5 = 0$$

$$r_1 = 1\,; r_2 = -5$$

Se buscan los autovectores K1, K2, K3

Se obtiene Adj $G(1)^T$ y se toma cualquier columna

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj\ G(1)^T} \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{K_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

Se obtiene Adj $G(-5)^T$ y se toma cualquier columna

Notar que se podía optar por cualquier columna. Son proporcionales

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj\ G(-5)^T} \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{-3} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{K_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}^h = C_1 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria dependiendo del carácter del término independiente

$$\begin{cases} x' + 2x + 3y = 0 \\ 3x + y' + 2y = 2e^{2t} \end{cases}$$

El término independiente es un vector con un elemento cero y otro elemento que corresponde a una exponencial donde b=2 y no es raíz de la solución homogénea asociada.

$$X_c(t) = Ae^{bt} \rightarrow\rightarrow A = G(b)^{-1}K \rightarrow\rightarrow G(2)^{-1}K$$

$$G(2) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad G(2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}}_{G(2)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{k} \quad \rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} \frac{-6}{7} \\ \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^C = \begin{bmatrix} \frac{-6}{7} \\ \frac{8}{7} \end{bmatrix} e^{2t}$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^G = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^H + \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}^C$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}^G = C_1 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6/7 \\ 8/7 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Paso 4 – Hallar la solución particular con las condiciones iniciales dadas

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}^G = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/7 \end{pmatrix} = C_1 e^0 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-5*0} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6/7 \\ 8/7 \end{pmatrix} e^{2*0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1/7 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6/7 \\ 8/7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1/7 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6/7 \\ 8/7 \end{pmatrix}$$

Despejando:

$$\begin{cases} 1 = 3\,C1 - 3\,C2 - \dfrac{6}{7} \\ -\dfrac{1}{7} = -3\,C1 - 3\,C2 + \dfrac{8}{7} \end{cases}$$

DESPEJANDO EL SISTEMA

$$C1 = \frac{11}{21}\,;\, C2 = -\frac{2}{21}$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}^P = \frac{11}{21} e^t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + (-\frac{2}{21}) e^{-5t} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6/7 \\ 8/7 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Ecuaciones En Diferencias

Material complementario

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 17 y 18

Prof.: Rita Beatriz Morrone

Problema dinámico:

- Se busca un patrón dado del cambio de una variable "y" con el tiempo "t".
- Se debe hallar una trayectoria temporal
- "t" es una variable discreta
- "y"cambia solo cuando la variable "t" pasa de un valor entero a otro

→ $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$

$$patrón\ de\ cambio = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

La incognita es una función

El valor de y_t depende de una manera específica del valor de "y " en el periodo inmediatamente anterior y_{t-1}

Se realiza un "análisis de períodos"

Ejemplo: $y_{t+1} = 0{,}9y_t$ →

$$y_1 = 0.9y_0$$
$$y_2 = 0.9y_1 = 0.9(0.9y_0) = (0.9)^2 y_0$$
$$y_3 = 0.9y_2 = 0.9(0.9)^2 y_0 = (0.9)^3 y_0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Éstos pueden resumirse en la solución

$$y_t = (0.9)^t y_0$$

Ecuación en diferencias de órden n:

$$F(\ t\ , y_t\ , y_{t+1}\ , \dots , y_{t+n}) = 0 \qquad con\ y_t, y_{t+n} \neq 0$$

Variable independiente

Variable dependiente

Desplazamientos de la variable dependiente en función de t

En forma normalizada

$$y_{t+n} = g(t, y_t, y_{t+1}, \dots , y_{t+n-1})$$

Ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes completa

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_{t+n-i} = g(t) = a_0 y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_n y_t = g(t)$$

$g(t) = 0$ *homogénea*

$g(t) \neq 0$ *no homogénea*

Cuando se dice “lineal”, implica → linealidad en los desplazamientos temporales

→ y_t no debe estar afectada

Propiedades

(1) Si se tiene : $y_t^1 \ \wedge \ y_t^2$ (Que son soluciones de una EED lineal homogenea de orden n)

Entonces, se puede decir que: $y_t^3 = C_1 y_t^1 + C_2 y_t^2$ **También es una solución**

Se puede demostrar de una forma muy sencilla:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\,[c_1 y_{t+n-1}^1 + c_2 y_{t+n-1}^2] = \underbrace{c_1 \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, y_{t+n-1}^1}_{=0} + c_2 \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\, y_{t+n-1}^2}_{=0}}_{\sum_{i=0}^{n} f_i(t) y_{t+n-i}^3 = 0} = 0$$

Cualquier combinación lineal finita de soluciones linealmente independientes de la ecuacion homogénea : Es una solución homogénea

(2) Si se tiene n funciones $\{y_t^1, y_t^2, \dots, y_t^n\}$ si ∃ $\{C_1, C_2, \dots C_n\} no\ todas\ nulas$

La combinación lineal resultante es igual a cero; el conjunto es LD

Pero si se verifica que $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$; el conjunto es LI

$$\begin{cases} c_1 y_t^1 + \cdots + c_n y_t^n \equiv 0 \\ \cdots \\ c_1 y_{t+n-1}^1 + \cdots + c_n y_{t+n-1}^n \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_t^1 & \cdots & y_t^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{t+n-1}^1 & \cdots & y_{t+n-1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes

El determinante del sistema homogéneo se denomina de Casorati (está formado por n valores consecutivos de n funciones de variable entera

Si el determinante de Casorati es distinto de cero ,el sistema es compatible determinado
Y la solución es la trivial.
El conjunto $\{y_t^1, y_t^2, \dots, y_t^n\}$ es linealmente independiente

Si : cualquier combinación lineal finita de soluciones de la homogénea es una solución homogénea

Todas las soluciones posibles → Constituyen un espacio vectorial

Cualquier base de ese espacio debe ser un conjunto de soluciones LI

Asi llegamos al sistema fundamental de soluciones , o sea "solución general" de la ecuación homogénea

$$\sum_{i=1}^{n} C_i y_t^i$$

(3)

La solución de la ecuación homogénea asociada sumada a la solución complementaria forman la solución general de la ecuación en diferencias

$$y_t = y_t^h + y_t^c$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\,[y_{t+n-1}^h + y_{t+n-1}^c] = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\,y_{t+n-1}^h + \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\,y_{t+n-1}^c = g(t)$$

$\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\,y_{t+n-1}^h$ → =0

$\sum_{i=0}^{n} f_i(t)\,y_{t+n-1}^c$ → =g(t)

Entonces y_t ⟶ Es solución de la EED completa

EED lineal con coeficientes constantes:

F(t) deja de ser una función de t y pasa a estar representado por un coeficiente constante “a”

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_{t+n-i} = g(t) = a_0 y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_n y_t = g(t)$$

Método de resolución iterativo (EED orden 1)

Sea una EED lineal con coeficientes constantes $y_{t+1} = Ay_t + B$ **(1)** con $A \neq 0$

$t = 0 \quad y_1 = Ay_0 + B$

$t = 1 \quad y_2 = A^2 y_0 + B(1 + A)$

$t = t \quad y_t = A^t y_0 + B(1 + A + A^2 + \cdots + A^{t-1}) = A^t y_0 + B\left(\frac{1-A^t}{1-A}\right)$

Sabemos entonces que la solución particular para y_0 será la siguiente:

$$y_t = \begin{cases} A^t y_0 + B\left(\frac{1-A^t}{1-A}\right) & si\ A \neq 1 \\ y_0 + Bt & si\ A = 1 \end{cases}$$

En caso de que $A \neq 1$, $B \neq 0$ y distribuyendo el segundo término nos queda la siguiente expresión,

$$y_t = A^t\left(y_0 - \frac{B}{1-A}\right) + \frac{B}{1-A}$$

pero al establecer la condición de equilibrio obtengo $y_t = y_{t+1} = y^* = \frac{B}{1-A}$ entonces la expresión queda,

$$y_t = A^t(y_0 - y^*) + y^*$$

notar que si $B = 0$, es decir, la EED es homogénea la solución va a quedar,

$$y_t = y_0 A^t$$

Método de coeficientes indeterminados

$$y_{t+1} - Ay_t = g(t)$$

$$y_{t+1} = Ay_t + B$$

$$y_{t+1} - Ay_t = B$$

$g(t)$ →
- A
- polinomio
- trigonométrica
- exponencial

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación homogénea asociada

Se ensaya la solución

$$y_t^h = r^t$$

$$y_{t+1}^h = r^{t+1} = r\, r^t$$

Luego se reemplaza lo obtenido en la ecuación en diferencias homogénea asociada

$$y_{t+1} - Ay_t = 0$$

$$r.r^t - Ar^t = 0$$

$$r^t.(r - A) = 0$$

$\neq 0$ $\qquad$ $= 0 \rightarrow r = A$

$$\boldsymbol{y^h = C1\, A^t}$$

Paso 2 –Hallar la solución complementaria

Según el carácter de la función g(t), Se realiza una propuesta:

$$y_t^c = K \rightarrow y_{t+1}^c = K$$

En este caso la diferencia de una constante es la misma constante

$$y_{t+1} - Ay_t = B$$

$$k - Ak = B$$

$$k(1 - A) = B$$

$$K = \frac{B}{1 - A}$$

$$\boldsymbol{y^c = \frac{B}{1 - A}}$$ Si $A \neq 1$

Notar que se está buscando una solución de equilibrio, por ende, en tal situación se considera $y_t^* \ldots y_{t+n}^*$ donde todas se igualan

Si $A = 1$

$$y_t^c = Kt \rightarrow y_{t+1}^c = K(t + 1)$$

En este caso la diferencia de una constante multiplicada por t es la constante *t , pero t sí se desplaza en el tiempo

$$y_{t+1} - Ay_t = B$$

$$k(t + 1) - Akt = B$$

$$k(t + 1 - At) = B$$

$$K = \frac{B}{t + 1 - At}$$

Si $A = 1$ → $\boldsymbol{y^c = bt}$

Paso 3-Armar la solución general

$$y_t = y_t^h + y_t^c \longrightarrow \boxed{y_t = C1\,A^t + \frac{B}{1-A}}$$

Paso 4- Hallar la solución particular (se precisan valores iniciales)

El objetivo es encontrar $C1$

$(t = 0)$

$$y_0 = C1.A^0 + \frac{B}{1-A} \longrightarrow \boxed{C1 = y_0 - \frac{B}{1-A}}$$

Entonces:

$$y^P = \left[y_0 - \frac{B}{1-A}\right].A^t + \frac{B}{1-A}$$

C1
Proporciona el ajuste para llegar al equilibrio

raíz

equilibrio

Si hay estabilidad ,hay convergencia

$$|r| < 1$$

Será monótona con r entre 0 y 1
Será oscilante con r entre -1 y 0

Si hay inestabilidad ,hay divergencia

$$|r| > 1$$

Dado que la solución evidencia la dinámica buscada, esta será convergente si a medida que t tiende a infinito , la solución homogénea tienda a cero y la solución general tienda a la solución completa (de equilibrio)

$$\lim_{t\to\infty}\left[y_0 - \frac{B}{1-A}\right].A^t + \frac{B}{1-A} = \frac{B}{1-A} \leftrightarrow |A| < 1$$

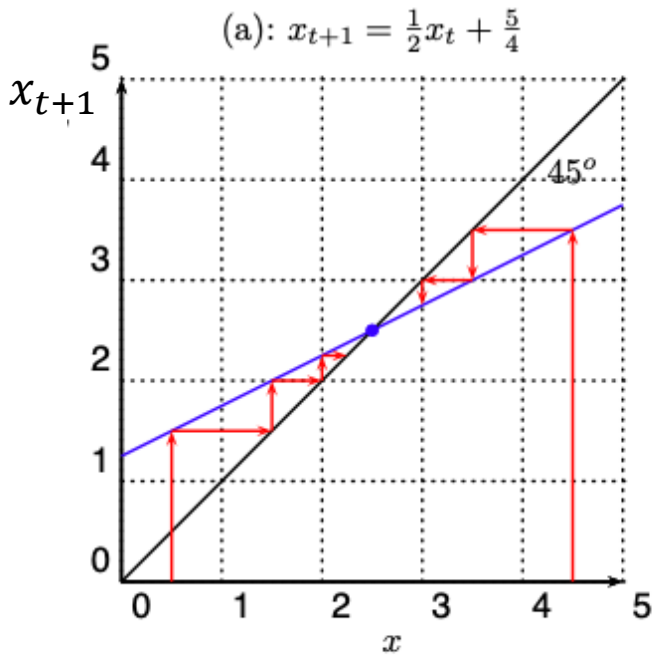
Diagramas de fase y su dinámica

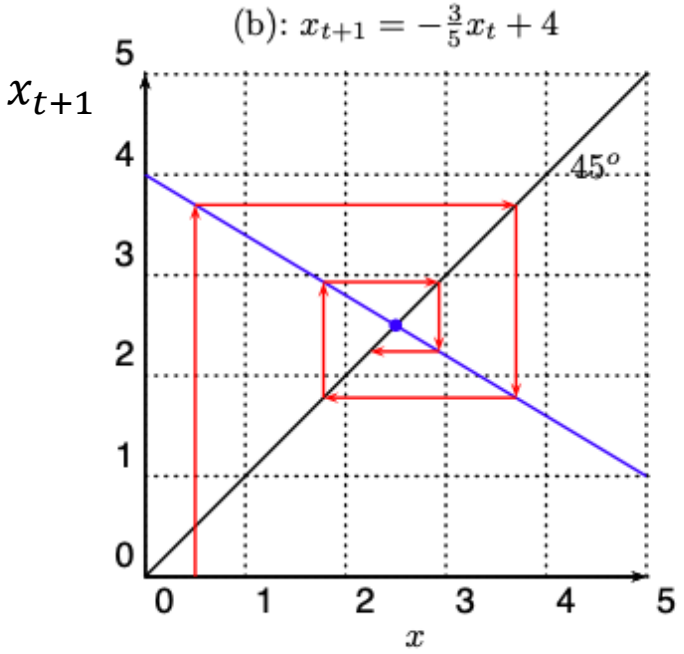
a) Caso $|r| < 1; r > 0$
convergente monótona

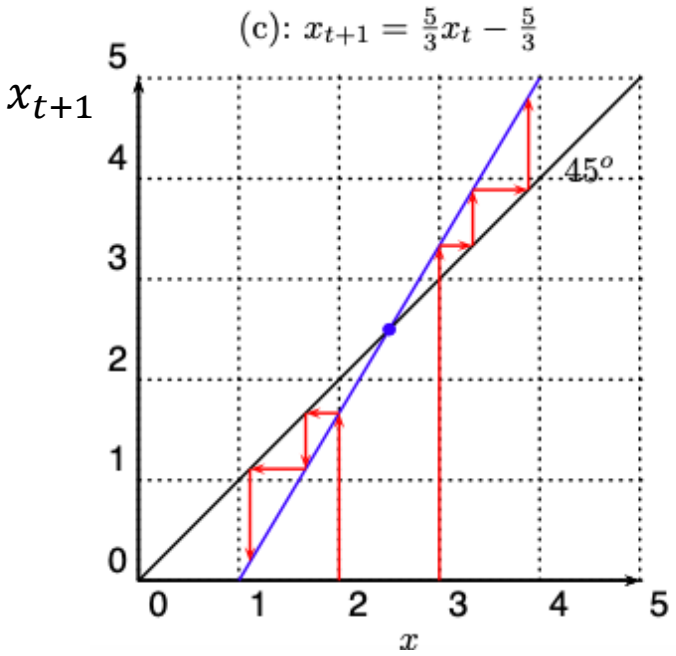
b) Caso $|r| < 1; r < 0$
convergente oscilante

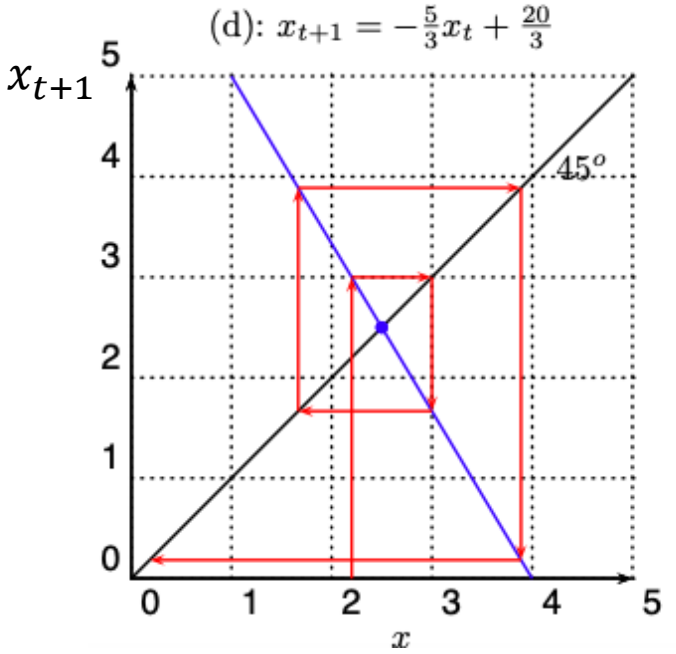
c) Caso $|r| > 1; r > 0$
di*vergente monótona*

d) Caso $|r| > 1; r < 0$
di*vergente oscilante*









Ejemplo 1:

$$y_{t+1} = 5y_t + 1 \;\; con\; y(0) = \frac{7}{4}$$

Reacomodar la expresión

$$y_{t+1} - 5y_t = 1$$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación homogénea asociada

$$y_{t+1} - 5y_t = 0$$

Se ensaya la solución

$$y_t^h = r^t$$

$$y_{t+1}^h = r^{t+1} = r\, r^t$$

Luego se reemplaza lo obtenido en la ecuación en diferencias homogénea asociada

$$y_{t+1} - 5y_t = 0$$

$$r.r^t - 5r^t = 0$$

$$r^t.(r-5) = 0$$

$\neq 0 \qquad = 0 \rightarrow r = 5$

$$\boldsymbol{y^h = C1\,(5)^t}$$

Paso 2 –Hallar la solución complementaria

$$y_{t+1} - 5y_t = 1$$

$$\boldsymbol{y_t^c = K \rightarrow y_{t+1}^c = K}$$

$$k - 5k = 1$$

$$k(1-5) = 1$$

$$K = \frac{1}{1-5}$$

$$\boldsymbol{y^c = -\frac{1}{4}}$$

Paso 3-Armar la solución general

$$y_t = y_t^h + y_t^c \longrightarrow \boxed{y_t = C1\,(5)^t - \frac{1}{4}}$$

Paso 4- Hallar la solución particular (se precisan valores iniciales)

El objetivo es encontrar $C1$

$$y(0) = \frac{7}{4}$$

$(t = 0)$

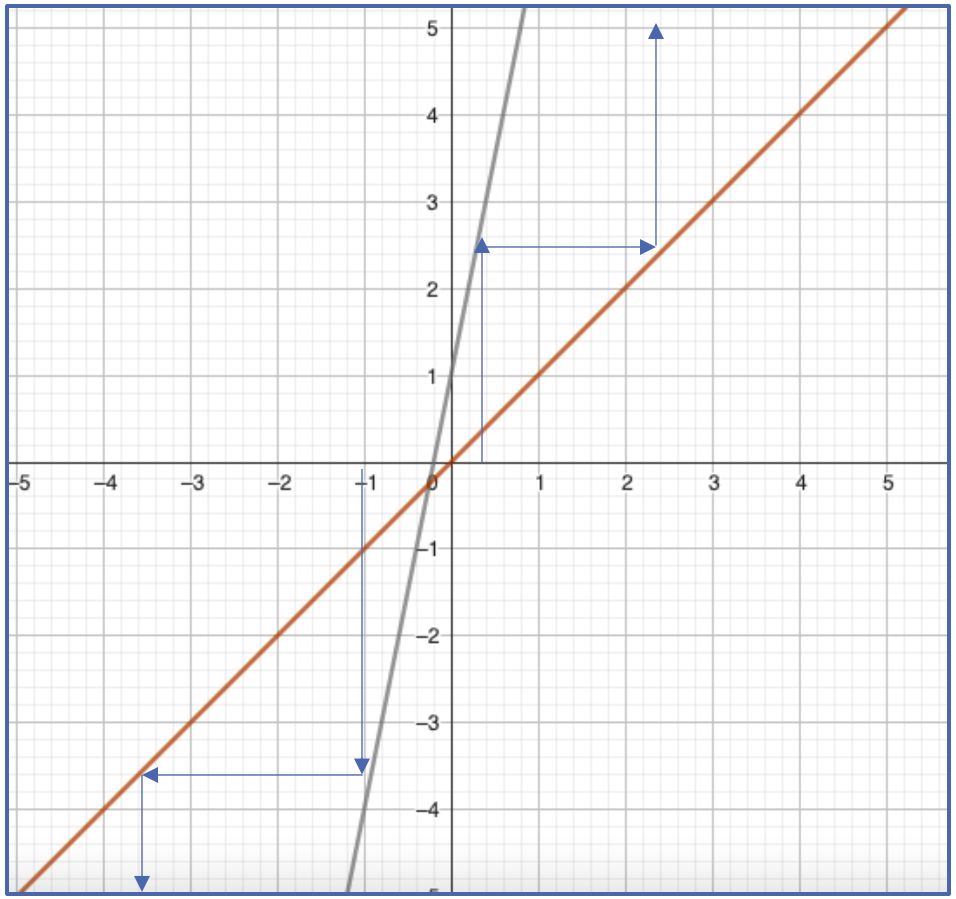
$$y_{(0)} = C1\,(5)^0 - \frac{1}{4} \longrightarrow \boxed{C1 = y_0 + \frac{1}{4}}$$

$$\boxed{C1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}}$$

Entonces: $y^p = 2\,(5)^t - \frac{1}{4}$

- $2\,(5)^t$: Proporciona el ajuste para llegar al equilibrio
- $(5)^t$: raíz
- $-\frac{1}{4}$: equilibrio

$$\lim_{t\to\infty} 2\,(5)^t - \frac{1}{4} = \infty \quad \rightarrow \boldsymbol{notar\ |5| > 1}$$



La dinámica será monótona divergente

Ejemplo 2:

$$y_{t+1} = -\frac{1}{2}y_t + 2^t \ \ con\ y(0) = 1$$

Reacomodar la expresión

$$y_{t+1} + \frac{1}{2}y_t = 2^t$$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación homogénea asociada

$$y_{t+1} + \frac{1}{2}y_t = 0$$

Se ensaya la solución

$$y_t^h = r^t$$

$$y_{t+1}^h = r^{t+1} = r\, r^t$$

Luego se reemplaza lo obtenido en la ecuación en diferencias homogénea asociada

$$y_{t+1} + \frac{1}{2}y_t = 0$$

$$r.r^t + \frac{1}{2}r^t = 0$$

$$r^t.\left(r + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$\neq 0$ $\quad = 0 \rightarrow r = -\frac{1}{2}$

$$\boldsymbol{y^h = C1\,(-\frac{1}{2})^t}$$

Paso 2 –Hallar la solución complementaria

$$y_{t+1} + \frac{1}{2}y_t = 2^t$$

$$\boldsymbol{y_t^c = A2^t \rightarrow y_{t+1}^c = A2^{t+1}}$$

Siempre que b=2 no sea raíz de la solución homogénea

$$\boldsymbol{A2^{t+1} + \frac{1}{2}A2^t = 2^t}$$

$$\boldsymbol{A2^t(2 + \frac{1}{2}) = 2^t}$$

$$A = \frac{2}{5}$$

$$\boldsymbol{y^c = \frac{2}{5}\,2^t}$$

Paso 3-Armar la solución general

$$y_t = y_t^h + y_t^c \longrightarrow \boxed{y_t = \boldsymbol{C1}\,(-\frac{1}{2})^t + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\,\mathbf{2}^t}$$

Paso 4- Hallar la solución particular (se precisan valores iniciales)

El objetivo es encontrar $C1$ $\quad y(0) = 1$

$(t = 0)$

$$y_{(0)} = \boldsymbol{C1}\,(-\frac{1}{2})^{\mathbf{0}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\,\mathbf{2}^{\mathbf{0}} \longrightarrow \boxed{C1 = y_0 - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}}$$

$$\boxed{C1 = 1 - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}}$$

Entonces: $\quad \boldsymbol{y^p = \frac{3}{5}(-\frac{1}{2})^t + \frac{2}{5}\,2^t}$

Proporciona el ajuste para llegar al equilibrio

raíz

Equilibrio móvil

La dinámica si bien en el largo plazo la solución homogénea tiende a la completa , notar que el equilibrio es móvil

Ejemplo 3 : Modelo dinámico de mercado

$$Q^d = Q^S$$
$$Q^d = \alpha - \beta p_t$$
$$Q^S = -\gamma + \delta p_{t-1}$$

Po: Precio inicial. Es el precio en el período t = 0 , es decir, el valor de partida del sistema antes de que empiece el ajuste en el tiempo

t : Número de períodos. Es el número de iteraciones o pasos de tiempo

α : Demanda autónoma. Representa la cantidad demandada en el mercado cuando el precio es igual a cero.

γ : Oferta autónoma. Es la cantidad ofertada cuando el precio es igual a cero.

β : Sensibilidad de la demanda al precio. Es el coeficiente que indica cómo la cantidad demandada cambia cuando varía el precio. Cuanto mayor sea α , mayor será la reducción en la cantidad demandada frente a un aumento en el precio.

.δ : Sensibilidad de la oferta al precio esperado. Es el coeficiente que indica cómo la cantidad ofertada cambia según varía el precio esperado. Cuanto mayor sea b, más reaccionan los productores ajustando la oferta a cambios en el precio esperado.

Operando algebraicamente al considerar la ecuación de equilibrio, queda conformada la ecuación en diferencias

$$\alpha - \beta p_t = -\gamma + \delta p_{t-1}$$
$$\beta p_t + \delta p_{t-1} = \alpha + \gamma$$
$$p_{t+1} + \frac{\delta}{\beta} p_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación homogénea asociada

$$p_{t+1} + \frac{\delta}{\beta} p_t = 0$$

Se ensaya la solución

$$p_t^h = r^t$$

$$p_{t+1}^h = r^{t+1} = r\, r^t$$

$$r\, r^t + \frac{\delta}{\beta} r^t = 0$$

$$r = -\frac{\delta}{\beta}$$

$$\mathrm{P(t)h} = \mathrm{c1} \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t$$

Paso 2 –Hallar la solución complementaria

$$\beta p_{t+1} + \delta p_t = \alpha + \gamma$$

$$P^*(\beta + \delta) = \alpha + \gamma$$

$$P^* = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

Es el precio de equilibrio

Paso 3-Armar la solución general

$$P_t = P_t^h + P_t^c$$

$$\mathrm{P(t)} = \mathrm{c1}\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$$

Paso 4- Hallar la solución particular (se precisan valores iniciales)

$$Pp = \left[P0 - \left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)\right]\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)$$

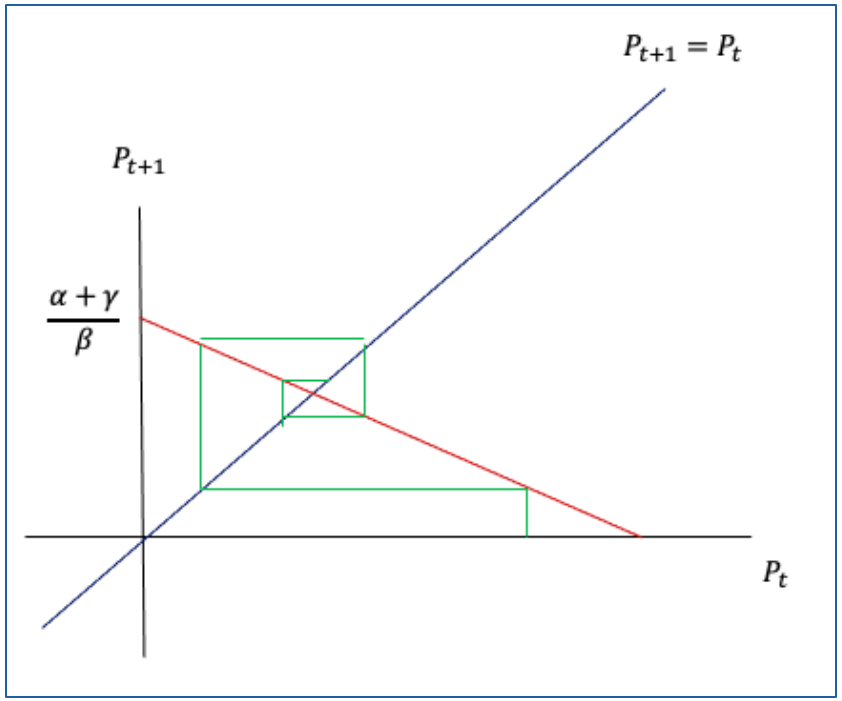
ajuste para llegar al equilibrio

raíz

Precio de equilibrio

Bajo el supuesto que beta sea mayor que delta, la raíz tendrá módulo menor a 1 , además si los parámetros son positivos (raíz negativa) la trayectoria será convergente oscilante

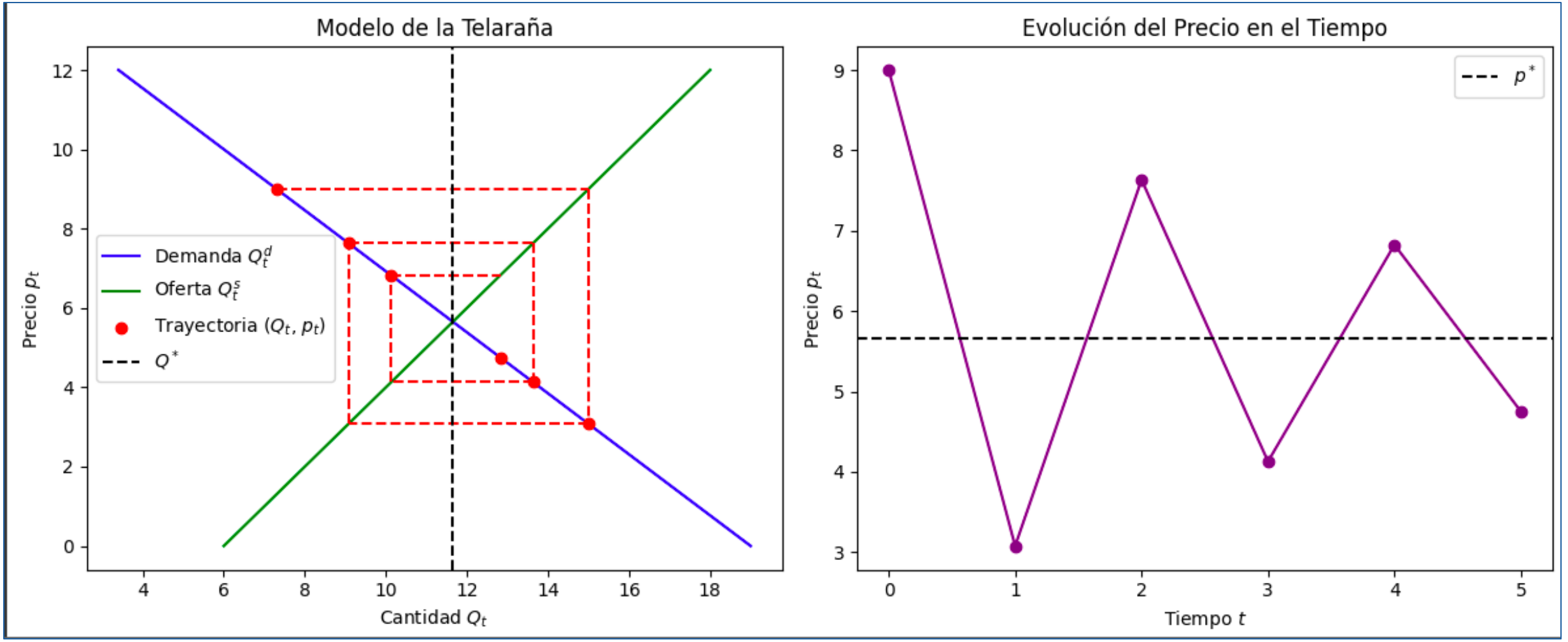
Diagrama de fases



$$\beta p_{t+1} + \delta p_t = \alpha + \gamma$$

$$P_{t+1} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta} - \frac{\delta}{\beta}P_t$$

Otra forma de pensarlo…



Ecuaciones en diferencias de orden superior

En las ecuaciones en diferencias de orden 2, implicamos la segunda diferencia ; es decir, el valor de una variable económica para el período t , depende no solo de t-1 , sino también de t-2

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta(y_{t+1} - y_t)$$
$$= (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t)$$
$$= y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$$

Una ecuación en diferencias de segundo orden incluye un retraso de tiempo de dos periodos en la variable en cuestión

Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (de segundo orden)

$$a0\ y_{t+2} + a1\, y_{t+1} + a2\, y_t = c$$

Recordando para EED para orden n

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_{t+n-i} = g(t) = a_0 y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \cdots + a_n y_t = g(t)$$

$y_t^h \rightarrow$ $\sum_{i=0}^{n} ai\ y_{t+n-i} = 0$

$y_t = r^t$

$y_{t+1} = r^{t+1} = r.r^t$

$$\sum_{i=0}^{n} ai\ r^{n-i}.r^t = 0$$

$$r^t \sum_{i=0}^{n} ai\ r^{n-i} = 0$$

$\neq 0$

=0

Ecuación característica

$$y^h = \sum_{i=1}^{n} Ci\ {r_i}^t$$

Las raíces pueden ser :
Reales simples
Reales dobles
complejas

Dado {r1…rn} son LI si y solo si

$$\sum_{i=1}^{n} Ci.ri = 0\ \ \forall\ Ci = 0$$

$$\begin{bmatrix} r1^t & \dots & \dots & rn^t \\ r1^{t+1} & \dots & \dots & rn^{t+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r1^{t+n-1} & \dots & \dots & rn^{t+n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C1 \\ \dots \\ \dots \\ Cn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$|D| \neq 0 \rightarrow sist.CD$

$$(r1^t. \dots . rn^t) \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ r1 & \dots & \dots & rn \\ r1^2 & \dots & \dots & rn^2 \\ r1^{n-1} & \dots & \dots & rn^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\neq 0$

$|D| \neq 0$

Caso de EED orden 2 $a0\ y_{t+2} + a1\ y_{t+1} + a2\ y_t = c$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación homogénea asociada

Solución homogénea asociada ⇒ $a0\ y_{t+2} + a1\ y_{t+1} + a2\ y_t = 0$

Al dividir *todos los términos por* $a0$: $b = \frac{a1}{a0}; c = \frac{a2}{a0}$

Raíces reales y distintas

Si $b^2 - 4c > 0$, entonces las raíces son reales y distintas. La solución de la ecuación homogénea viene dada por:

$$y_t^h = c_1 \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right)^t + c_2 \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right)^t$$

Raíces reales dobles

Si $b^2 - 4c = 0$ la solución homogénea resulta:

$$y_t^h = c_1 \left(\frac{-b}{2}\right)^t + c_2 \left(\frac{-b}{2}\right)^t t$$

Raíces complejas conjugadas

Si $b^2 - 4c < 0$ la solución es igual a:

$$y_t^h = \rho^t \left[M \cos(\omega t) + N \sin(\omega t)\right]$$

Donde $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ y $\omega = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$.

Paso 2 –Hallar la solución complementaria

Solución completa : representa el nivel de equilibrio intertemporal de $\boldsymbol{y}$

$si\ sustituímos \quad y_t* = k$

$$K + a_1K + a_2K = C$$

$$k(1 + a_1 + a_2) = C$$

$$K = \frac{C}{1 + a_1 + a_2}$$

En caso de que $a_1 + a_2 \neq -1$

En caso de que $a_1 + a_2 = -1$

$sustituímos \quad y_t* = kt$

$$k(t + 2) + a_1k(t + 1) + a2kt = C$$

$$k = \frac{C}{(1 + a_1 + a_2)t + a_1 + 2}$$

Paso 3-Armar la solución general

$$y_t = y_t^h + y_t^c$$

Si se tienen condiciones iniciales se puede hallar la solución particular

Análisis de estabilidad en modelos con una ecuación en diferencias

La condición necesaria y suficiente de estabilidad es que la totalidad de las raíces tengan módulo menor a 1, de forma tal que cuando la variable independiente tienda a infinito la solución homogénea tienda a la solución de equilibrio.

$$y_{t+2} + Py_{t+1} + Qy_t = 0 \ (ecuación\ característica)$$
$$planteo: a0\ y_{t+2} + a1\ y_{t+1} + a2\ y_t = 0$$

a0;a1;a2 son los coeficientes

Si se divide todo por a0 y se asigna : $P = \frac{a1}{a0}$ $Q = \frac{a2}{a0}$

Para que ambas raíces sean menores que $|1|$, o sea estén entre -1 y 1

$$1 - Q > 0$$
$$1 + P + Q > 0$$
$$1 - P + Q > 0$$

o, bien

$$Q < 1$$
$$(P + Q) > (-1)$$
$$(P - Q) < 1$$

Entonces , para que sea convergente se deducen las siguientes condiciones :

C.N =la suma de todos los coeficientes sea positiva
CS= la suma de los valores absolutos de todos los coeficientes sea menor que “2.a0”
CS=que todos los coeficientes sean positivos y decrecientes

CN y CS=los n determinantes de la matriz de Schurt sean positivos

$$\Delta 1 = \begin{bmatrix} a0 & an \\ an & a0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta 2 = \begin{bmatrix} a0 & 0 & an & an-1 \\ a1 & a0 & 0 & an \\ an & 0 & a0 & a1 \\ an-1 & an & 0 & a0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta 3 = \begin{bmatrix} a0 & 0 & 0 & an & an-1 & an-2 \\ a1 & a0 & 0 & 0 & an & an-1 \\ a2 & a1 & a0 & 0 & 0 & an \\ an & 0 & 0 & a0 & a1 & a2 \\ an-1 & an & 0 & 0 & a0 & a1 \\ an-2 & an-1 & an & 0 & 0 & a0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4: $y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 10$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación homogénea asociada

$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 0$

Se ensaya la solución

$y_t^h = r^t$

$y_{t+1}^h = r^{t+1} = r\, r^t$

$y_{t+2}^h = r^{t+2} = r^2 r^t$

Luego se reemplaza lo obtenido en la ecuación en diferencias homogénea asociada

$r^2 r^t - 5r\, r^t + 6r^t = 0$

$r^t(r^2 - 5\, r + 6) = 0$

$r1 = 3; r2 = 2$

$\boldsymbol{y_h = c1(3)^t + c2(2)^t}$

Paso 2 –Hallar la solución complementaria

$y_{t+2} - 5y_{t+1} + 6y_t = 10$

$\boldsymbol{y_t^c = k}$

$\boldsymbol{y_{t+1}^c = k}$

$\boldsymbol{y_{t+2}^c = k}$

$k - 5\, k + 6\, k = 10$

$k(1 - 5\ + 6\ ) = 10$

$\boldsymbol{y^* = \dfrac{10}{1 - 5 + 6} = 5}$

Paso 3-Armar la solución general

$y_t = y_t^h + y_t^c$

$\boldsymbol{y_g = c1(3)^t + c2(2)^t + 5}$

La dinámica será inestable

Ejemplo 5 :

$$y_{t+2} + y_{t+1} - 3y_t = 7^t$$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación homogénea asociada

$$y_{t+2} + y_{t+1} - 3y_t = 0$$

Se ensaya la solución

$$y_t^h = r^t$$

$$y_{t+1}^h = r^{t+1} = r\, r^t$$

$$y_{t+2}^h = r^{t+2} = r^2 r^t$$

Luego se reemplaza lo obtenido en la ecuación en diferencias homogénea asociada

$$r^2 r^t + r\, r^t - 3r^t = 0$$

$$r^t(r^2 + r\ - 3) = 0$$

$\neq 0$ $\quad$ $= 0 \rightarrow r1, r2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-3)}}{2}$

$$r_1 = 1{,}3028; r_2 = -2{,}3028$$

$$y_t^h = C_1(1{,}3028)^t + C_2(-2{,}3028)^t$$

Paso 2 –Hallar la solución complementaria

$$y_{t+2} + y_{t+1} - 3y_t = 7^t$$

$$y_t^c = A7^t$$

$$y_{t+1}^c = A7^{t+1}$$

$$y_{t+2}^c = A7^{t+2}$$

$$A7^{t+2} + A7^{t+1} - 3A7^t = 7^t$$

$$A7^t(7^2+7-3) = 7^t$$

$$A = \frac{1}{53}$$

$$y_t^c = \frac{1}{53}7^t$$

Siempre que b=7 no sea raíz de la solución homogénea

Paso 3-Armar la solución general

$$y_t^g = C_1(1{,}3028)^t + C_2(-2{,}3028)^t + \frac{1}{53}7^t$$

La dinámica será inestable y además posee un equilibrio móvil

Ejemplo 6 :

$$y_{t+2} + \frac{1}{4} y_t = 5$$

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación homogénea asociada

$$y_{t+2} + \frac{1}{4} y_t = 0$$

Se ensaya la solución

$$y_t^h = r^t$$

$$y_{t+1}^h = r^{t+1} = r\, r^t$$

$$y_{t+2}^h = r^{t+2} = r^2 r^t$$

Luego se reemplaza lo obtenido en la ecuación en diferencias homogénea asociada

$$r^2 r^t + 0\, r\, r^t + \frac{1}{4} r^t = 0$$

$$r^t \left(r^2 + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$\neq 0$ $\quad$ $= \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{r1, r2 = 0 \pm \frac{1}{2} i}$

Parte real α

Parte imaginaria β

Se obtiene la norma $\rho = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

Se obtiene w $\quad \cos\theta = \frac{\alpha}{\rho} = 0 \qquad \sin\theta = \frac{\beta}{\rho}$

Puesto que el valor del ángulo θ debe satisfacer a ambas expresiones , θ=90 grados que equivale a $\frac{\pi}{2}$

$$y_t^h = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(C_1 cos \frac{\pi}{2} t + C_1 sen \frac{\pi}{2} t\right)$$

Paso 2 –Hallar la solución complementaria

$$y_{t+2} + \frac{1}{4} y_t = 5$$

$y_t^c = A$

$y_{t+1}^c = A$

$y_{t+2}^c = A$

$$A + \frac{1}{4} A = 5$$

$$A(1 + \frac{1}{4}) = 5$$

$A = 4$

$$y_t^c = 4$$

Paso 3-Armar la solución general

$$y_t^g = \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(C_1 cos \frac{\pi}{2} t + C_1 sen \frac{\pi}{2} t\right) + 4$$

La dinámica será convergente ya que en el largo plazo la solución homogénea tiende a la solución de equilibrio ”4”

Ejemplo 7:

Dado el siguiente modelo

$$r_t = u_t + a_t + v_0$$
$$u_t = \beta r_{t-1}$$
$$a_t = \beta r_{t-1} - \beta r_{t-2}$$

$$\boldsymbol{r_t = 2\beta r_{t-1} - \beta r_{t-2} + v_0}$$

Condensamos todo en una sola ecuación

$$r_{t+2} = 2\beta r_{t+1} - \beta r_t + v_0$$

Desplazamos todo 2 períodos

$$r_{t+2} - 2\beta r_{t+1} + \beta r_t = v_0$$

Ordemamos los términos

Paso 1 –Hallar la solución de la ecuación homogénea asociada

$$r_{t+2} - 2\beta r_{t+1} + \beta r_t = 0$$

Se ensaya la solución

$$r_t^h = r^t$$
$$r_{t+1}^h = r^{t+1} = r\, r^t$$
$$r_{t+2}^h = r^{t+2} = r^2 r^t$$

$$r^2 r^t - 2\beta\, r\, r^t + \beta\, r^t = 0$$

$$r^t\,(r^2 - 2\beta\, r\, + \beta) = 0$$

$$r1; r2 = \frac{2\beta \mp \sqrt{(2\beta)^2 - 4.\beta}}{2}$$

$$r1; r2 = \frac{2\beta \mp \sqrt{4(\beta)^2 - 4.\beta}}{2}$$

$$r1; r2 = \frac{2\beta \mp \sqrt{4(\beta^2 - \beta)}}{2}$$

$$r1; r2 = \frac{2\beta \mp 2\sqrt{(\beta^2 - \beta)}}{2}$$

$$r1 = \beta + \sqrt{(\beta^2 - \beta)}$$

$$r2 = \beta - \sqrt{(\beta^2 - \beta)}$$

$$r_t^h = C1\left(\beta + \sqrt{(\beta^2 - \beta)}\right)^t + C2\left(\beta - \sqrt{(\beta^2 - \beta)}\right)^t$$

Planteo de solución general y análisis de estabilidad si beta=2

$$r1 = \beta + \sqrt{(\beta^2 - \beta)}$$

$$r2 = \beta - \sqrt{(\beta^2 - \beta)}$$

$$r1 = 2 + \sqrt{2}$$

$$r2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$r_t^h = C1\left(2 + \sqrt{2}\right)^t + C2\left(2 - \sqrt{2}\right)^t$$

Paso 2 –Hallar la solución complementaria

$$r_{t+2} - 2\beta r_{t+1} + \beta r_t = v_0$$

$$k - 4k + 2k = v_0$$

$$k = -v_0$$

$$\boldsymbol{r_t^c = k}$$
$$\boldsymbol{r_{t+1}^c = k}$$
$$\boldsymbol{r_{t+2}^c = k}$$

$$r_t^g = r_t^h + r_t^c$$

Paso 3-Armar la solución general

$$r_t^g = C1\left(2 + \sqrt{2}\right)^t + C2\left(2 - \sqrt{2}\right)^t - v_0$$

$$r_t^g = C1\left(2+\sqrt{2}\right)^t + C2\left(2-\sqrt{2}\right)^t - v_0$$

Para que la solución sea convergente las raíces deben tener módulo menor a 1; situación que NO sucede ;ya que una de las raíces tiene módulo menor a 1 y la otra tiene módulo mayor a 1.

Para que ambas raíces tengan módulo menor a 1, o sea estén entre -1 y 1 deberían cumplir estas condiciones

$$1 - Q > 0$$
$$1 + P + Q > 0$$
$$1 - P + Q > 0$$

$$Q < 1$$
$$(P + Q) > (-1)$$
$$(P - Q) < 1$$

¡¡¡¡Es inestable!!!!

$$1 - Q > 0$$
$$1 + P + Q > 0$$
$$1 - P + Q > 0$$

$$1 - 2 > 0$$ No se cumple
$$1 - 4 + 2 > 0$$ No se cumple
$$1 + 4 + 2 > 0$$

Ya sabemos que es inestable ; veamos a modo didáctico que no se cumple ninguna condición de estabilidad

$$r_{t+2} - 4r_{t+1} + 2r_t = v_0$$

C.N =la suma de todos los coeficientes sea positiva → No se cumple (dá : -1)

CS= la suma de los valores absolutos de todos los coeficientes sea menor que "2.a0" → No se cumple (da: 7 y es mayor que 2)

CS=que todos los coeficientes sean positivos y decrecientes → No se cumple

CN y CS=los n determinantes de la matriz de Schurt sean positivos → No se cumple

$$\Delta 1 = \begin{bmatrix} a0 & an \\ an & a0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta 1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det = -3$$

$$\Delta 2 = \left[\begin{array}{cc|cc} a0 & 0 & an & an-1 \\ a1 & a0 & 0 & an \\ \hline an & 0 & a0 & a1 \\ an-1 & an & 0 & a0 \end{array}\right]$$

$$\Delta 2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det = -7$$

Sistemas de Ecuaciones En Diferencias

Material complementario

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 19

Prof.: Rita Beatriz Morrone

Sistema de ecuaciones en diferencias lineales

Un sistema de ecuaciones en diferencias consta de dos o más ecuaciones en diferencias en las cuales están incluidas dos o más funciones incógnita.

La solución del sistema estará dada por dos o más funciones que satisfagan simultáneamente a todas las ecuaciones del sistema.

Si las ecuaciones son lineales, para que el sistema tenga solución, el número de ecuaciones debe ser igual al número de funciones incógnita.

Sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

$$\begin{cases} y_{t+1}^1 = a_{11}y_t^1 + a_{12}y_t^2 + \cdots + a_{1n}y_t^n + g_1(t) \\ y_{t+1}^2 = a_{11}y_t^1 + a_{12}y_t^2 + \cdots + a_{1n}y_t^n + g_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{t+1}^n = a_{11}y_t^1 + a_{12}y_t^2 + \cdots + a_{1n}y_t^n + g_n(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} y_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 \\ \cdots \\ y_{t+1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ \cdots \\ y_t^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \cdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes A

Para encontrar las trayectorias de tiempo de y_t^1 a y_t^n tales que se satisfagan simultáneamente todas las ecuaciones en este sistema, nuevamente, se deberán buscar las integrales particulares y las funciones complementarias, para luego sumarlas y obtener las trayectorias de tiempo deseadas de las n variables.

Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones en diferencias lineales

Resolución por ecuación eliminante

Se aplica para resolver sistemas de ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes o variables, homogéneos o no homogéneos.
El procedimiento consiste en obtener a través de métodos algebraicos una sola ecuación con una sola función incógnita, llamada ecuación eliminante, que resulta de igual o menor orden que el orden del sistema.
Este método resulta más conveniente a nivel práctico para la resolución de sistemas de 2 ecuaciones donde $g_i(t)$ es un polinomio, una función trigonométrica o la suma o producto de estas.
Mientras que presentaría un trabajo mayor en sistemas de más de dos ecuaciones.

Resolución de sistemas lineales cuadrados por matriz de operadores

Se expresa cada ecuación del sistema por polinomios operadores (E) aplicados a cada función incógnita.

$$\mathbf{E} = \mathbf{y_{t+1}}$$
$$\mathbf{E^2} = \mathbf{y_{t+2}}$$
$$\mathbf{E^n} = \mathbf{y_{t+n}}$$

Luego se expresa el sistema en forma matricial, donde la matriz del sistema es una función de operadores $G(E)$.

$$\mathbf{G(E)Y = A}$$

A partir de allí en primer lugar se resuelve el sistema homogéneo asociado, luego se obtiene la solución complementaria dependiendo del carácter del término independiente para finalmente obtener la solución general

Resolución de sistemas lineales cuadrados por matriz de operadores

Ejemplo 1: ***Dado el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:***

$$\begin{cases} y_{t+1} = -ay_t - bx_t + g_1(t) \\ x_{t+1} = -dy_t - ex_t + g_2(t) \end{cases}$$

Expresión matricial

$$\begin{pmatrix} y_{t+1} \\ x_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -d & -e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

Procedimiento para hallar la solución a través de la matriz de operadores

Paso 1 – Hallar la solución del sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo asociado $G(\mathrm{E})Y = \theta$.

$$\boldsymbol{y_{t+1} + ay_t} + bx_t = 0$$
$$\boldsymbol{x_{t+1}} + dy_t + \boldsymbol{ex_t} = 0$$

$G(\mathrm{E})$ es la matriz nxn de los polinomios operadores del sistema

vector columna de las funciones incógnita

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E + a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{E + e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico viene dado por $|G(\mathrm{E})|$ y la ecuación característica por $|G(\mathrm{E})| = 0$. El número de soluciones (autovalores) linealmente independiente del sistema está dado por el grado de la ecuación característica.

Ya que se trata de un sistema homogéneo y se desea que la solución sea diferente de la trivial, se busca que sea SCI
Por propiedad de sistemas homogéneos, si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero, dicho sistema lo será. De esta manera se desarrolla su determinante y se iguala a cero para obtener la ecuación característica.

$$\begin{vmatrix} E+a & b \\ d & E+e \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación Característica

$$(E+a)(E+e) - bd = 0$$
$$E^2 + eE + aE + ae - bd = 0$$
$$E^2 + (e+a)E + (ae - bd) = 0$$

$$\boldsymbol{E^2 + (e+a)E + (ae - bd) = 0}$$

Se obtienen las raíces y se evalúan

$$r_1; r_2 = \frac{-(e+a) \pm \sqrt{(-(e+a))^2 - 4(ae-bd)}}{2}$$

$si\ \left(-(e+a)\right)^2 > 4(ae-bd) \rightarrow\rightarrow\rightarrow$ *Raíces reales distintas*

$si\ \left(-(e+a)\right)^2 = 4(ae-bd) \rightarrow\rightarrow\rightarrow$ *Raíces reales iguales*

$si\ \left(-(e+a)\right)^2 < 4(ae-bd) \rightarrow\rightarrow\rightarrow$ *Raíces complejas conjugadas*

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}^h = C_1(r_1)^t K_1 + C_2(r_2)^t K_1$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}^h = C_1(r_1)^t K_1 + C_2(r_2)^t\ t\ K_1$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}^h = K\ \rho^t(C_1 \operatorname{sen} \theta t + C_2 \cos \theta t)$$

$Dado \quad \alpha \pm \beta I$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\rho} \qquad \operatorname{sin}\theta = \frac{\beta}{\rho}$$

Notar que las expresiones contienen K_1 y K_2. Se corresponden con los autovectores del sistema y las raíces con los autovalores

Puesto que el valor del ángulo θ debe satisfacer a ambas expresiones , se obtiene θ en grados, y luego se pasa a radianes. Recordar $\pi \cong 180\ grados$

Método para hallar los autovectores (se pueden hallar por método de los adjuntos o resolviendo el sistema) :

Se obtiene $Adj\ G(r1)^T$ y se toma cualquier columna

Se reemplaza D por la raíz

Se transpone

Se obtienen los cofactores adjuntos

$Adj\ G(r1)^T$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E+a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{E+e} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r1+a & b \\ d & r1+e \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r1+a & d \\ b & r1+e \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{r1+e} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-d} & \boldsymbol{r1+a} \end{bmatrix}$$

Autovectores:
(Se puede utilizar cualquiera de estos)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{r1+e} \\ \boldsymbol{-d} \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} -b \\ r1+a \end{bmatrix}$$

Se obtiene $Adj\ G(r2)^T$ y se toma cualquier columna

Se reemplaza D por la raíz

Se transpone

Se obtienen los cofactores adjuntos

$Adj\ G(r2)^T$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E+a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{E+e} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r2+a & b \\ d & r2+e \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} r2+a & d \\ b & r2+e \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{r2+e} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{-d} & \boldsymbol{r2+a} \end{bmatrix}$$

Autovectores:
(Se puede utilizar cualquiera de estos)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{r2+e} \\ \boldsymbol{-d} \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} -b \\ r2+a \end{bmatrix}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria dependiendo del carácter del término independiente

Caso $\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$

Si el sistema está igualado a términos independientes constantes, el sistema en forma matricial se puede expresar como $G(\mathrm{E})Y = K$.

Si no hay raíz nula, se ensaya la solución particular $\boldsymbol{Y_C = A}$
Reemplazando, se tiene que $G(\mathrm{E})A = K$. Teniendo en cuenta la Propiedad de que $\boldsymbol{G(\mathrm{E})A = G(1)A}$ se puede deducir que
$\boldsymbol{A = G(1)^{-1}\, K = Y_C}$ es la solución completa.

$Buscamos:\quad G(1)^{-1}$

$$G(1) = \begin{bmatrix} (1+a) & b \\ d & (1+e) \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\rightarrow G(1)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{(1+e)}{((1+a)(1+e)-bd)} & \dfrac{-b}{((1+a)(1+e)-bd)} \\ \dfrac{-d}{((1+a)(1+e)-bd)} & \dfrac{(1+a)}{((1+a)(1+e)-bd)} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{(1+e)}{((1+a)(1+e)-bd)} & \dfrac{-b}{((1+a)(1+e)-bd)} \\ \dfrac{-d}{((1+a)(1+e)-bd)} & \dfrac{(1+a)}{((1+a)(1+e)-bd)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{(1+e)c - bf}{((1+a)(1+e)-bd)} \\ \dfrac{-dc + f(1+a)}{((1+a)(1+e)-bd)} \end{bmatrix}$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}^G = C_1(r_1)^t K_1 + C_2(r_2)^t K_1 + \begin{bmatrix} \dfrac{(1+e)c - bf}{((1+a)(1+e)-bd)} \\ \dfrac{-dc + f(1+a)}{((1+a)(1+e)-bd)} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A = G(1)^{-1}\, K}$

Para el caso RR≠ con $g(t)_1\, y g(t)_2$ *constantes*

Paso 2 – Hallar la solución complementaria dependiendo del carácter del término independiente

Caso $\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & \beta_1^t \\ f & \beta_2^t \end{pmatrix}$

Con $\beta_1^t \neq \beta_2^t$

Si el sistema está igualado a términos independientes exponenciales, el sistema en forma matricial se puede expresar como $G(\mathrm{E})Y = K\,\beta^t$

siempre y cuando β no sea raíz de la solución homogénea

Si los β son diferentes se debe expresar la solución completa de manera tal que se tenga un término para cada β^t y se debe hallar una solución particular para cada uno de ellos.
Para el caso de dos exponenciales distintas la solución será:

$$y_c = G(\beta_1)^{-1} K_1\,\beta_1^t + G(\beta_2)^{-1} K_2\,\beta_2^t$$

$$Buscamos: y_c = G(\beta_1)^{-1} K_1\,\beta_1^t + G(\beta_2)^{-1} K_2\,\beta_2^t$$

$$\begin{pmatrix} yt \\ xt \end{pmatrix}^c = \begin{bmatrix} \frac{(\beta_1+e)}{((\beta_1+a)(\beta_1+e)-bd)} & \frac{-b}{((\beta_1+a)(\beta_1+e)-bd)} \\ \frac{-d}{((\beta_1+a)(\beta_1+e)-bd)} & \frac{(\beta_1+a)}{((\beta_1+a)(\beta_1+e)-bd)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \beta_1^t + \begin{bmatrix} \frac{(\beta_2+e)}{((\beta_2+a)(\beta_2+e)-bd)} & \frac{-b}{((\beta_2+a)(\beta_2+e)-bd)} \\ \frac{-d}{((\beta_2+a)(\beta_2+e)-bd)} & \frac{(\beta_2+a)}{((\beta_2+a)(\beta_2+e)-bd)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \beta_2^t$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}^G = C_1(r_1)^t K_1 + C_2(r_2)^t K_1 + \begin{bmatrix} \frac{(\beta_1+e)c}{((\beta_1+a)(\beta_1+e)-bd)} \\ \frac{-dc}{((\beta_1+a)(\beta_1+e)-bd)} \end{bmatrix} \beta_1^t + \begin{bmatrix} \frac{-bf}{((\beta_2+a)(\beta_2+e)-bd)} \\ \frac{(\beta_2+a)f}{((\beta_2+a)(\beta_2+e)-bd)} \end{bmatrix} \beta_2^t$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria dependiendo del carácter del término independiente

Caso $\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & \beta^t \\ f & \beta^t \end{pmatrix}$

Con $\beta^t = \beta^t$

Si el sistema está igualado a términos independientes exponenciales, el sistema en forma matricial se puede expresar como $G(\mathrm{E})Y = K\,\beta^t$

siempre y cuando β no sea raíz de la solución homogénea

Si los β **son iguales** se expresa $G(\mathrm{E})Y = K\beta^t$

Si no hay raíz = b, se ensaya la solución particular $Y = A\beta^t$.Reemplazando se tiene que $G(\mathrm{E})A = K\beta^t$ Teniendo en cuenta la propiedad de que $G(\mathrm{E})A\beta^t = G(\beta)A\beta^t$se deduce que $A = G(\beta)^{-1}K$ y la solución completa es

$$y_c = G(\beta)^{-1}K\beta^t$$

$$\begin{pmatrix} yt \\ xt \end{pmatrix}^c = \begin{bmatrix} \dfrac{(\beta + e)}{((\beta + a)(\beta + e) - bd)} & \dfrac{-b}{((\beta + a)(\beta + e) - bd)} \\ \dfrac{-d}{((\beta + a)(\beta + e) - bd)} & \dfrac{(\beta + a)}{((\beta + a)(\beta + e) - bd)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} \beta^t$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}^G = C_1(r_1)^t K_1 + C_2(r_2)^t K_1 + \begin{bmatrix} \dfrac{(\beta + e)c - bf}{((\beta + a)(\beta + e) - bd)} \\ \dfrac{-dc + f(\beta + a)}{((\beta + a)(\beta + e) - bd)} \end{bmatrix} \beta^t$$

Estabilidad de la solución

Se dice que la solución del sistema de ecuaciones en diferencias es estable si la solución homogénea tiende a cero a medida que la variable independiente tiende a infinito.
Si se cumple esta condición de estabilidad, la solución general tiende a la solución completa, también llamada solución de equilibrio.

Notar que para que esto suceda la totalidad de las raíces deben tener módulo menor a 1.
En el caso de la solución con raíces complejas conjugadas, la parte real del de la raíz compleja debe ser negativa

Se denomina punto de equilibrio o punto fijo de un sistema de ecuaciones en diferencias lineales a aquel punto en el que se cumple que cada una de las variables funcionales se encuentran en reposo, tal que:

$$\begin{cases} y_{t+1}^1 = y_t^1 \\ \vdots \\ y_{t+1}^n = y_t^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{t+1}^1 - y_t^1 = 0 \\ \vdots \\ y_{t+1}^n - y_t^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta y_t^1 = 0 \\ \vdots \\ \Delta y_t^n = 0 \end{cases}$$

La utilización del operador diferencia, Δ, resume la estabilidad del modelo: el valor de la variable funcional en t + 1 debe ser igual a dicho valor en t.
En ausencia simultánea de movimiento (esto es, cuando $\Delta y_t = 0$), el sistema se encuentra en reposo o en equilibrio.

La condición necesaria y suficiente de estabilidad es que la totalidad de las raíces tengan módulo menor a 1, de forma tal que cuando la variable independiente tienda a infinito la solución homogénea tienda a la solución de equilibrio.

$$\lim_{t\to\infty}\begin{bmatrix}y_t\\x_t\end{bmatrix}^G = \lim_{t\to\infty} C_1(r_1)^t K_1 + C_2(r_2)^t K_1 + \begin{bmatrix}Sc1\\Sc2\end{bmatrix}$$

Notar que los autovalores son las raíces por lo cual si el módulo de ambas es menor a 1 la solución será convergente

1. Condición NECESARIA: que el valor absoluto de la traza de A sea menor que n.

2. Condición NECESARIA: que el determinante de A sea en valor absoluto menor que uno.

3. Condición SUFICIENTE: que las sumas de los valores absolutos de todos los elementos de cada columna (o de cada fila) de A sean menores que uno.

4. Si A es una matriz NO NEGATIVA es condición NECESARIA Y SUFICIENTE que la matriz $(I - A)$ tenga todos sus menores principales dominantes positivos.

5. Si A es una matriz NO NEGATIVA es condición SUFICIENTE que la suma de cada columna (o de cada fila) de A sea menor que uno.

6. Si A es una matriz NO NEGATIVA es condición SUFICIENTE DE INESTABILIDAD que todas las sumas de las columnas (o de las filas) de A sean mayores que uno.

7. Si A es una matriz NO NEGATIVA NO DESCOMPONIBLE es condición SUFICIENTE que la suma de cada columna (o de cada fila) de A no sea mayor que uno y que al menos una de ellas sea menor que uno.

8. Si A es una matriz POSITIVA valen las condiciones 4 a 7.

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} 2x_{t+1} - 3x_t + 5y_t = 2 \\ 2x_t + y_{t+1} - 2y_t = 7 \\ x_0 = \frac{10}{9}; y_0 = -\frac{43}{9} \end{cases}$$

paso 1 - Hallar la solución del sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo $G(\mathrm{E})X = \theta$.

$$\begin{bmatrix} 2E-3 & 5 \\ 2 & E-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

¡¡¡Buscamos que sea SCI !!!

Ya que se trata de un sistema homogéneo y se desea que la solución sea diferente de la trivial, se busca que sea SCI Por propiedad de sistemas homogéneos, si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero, dicho sistema lo será. De esta manera se desarrolla su determinante y se iguala a cero para obtener la ecuación característica.

$$\begin{vmatrix} 2E-3 & 5 \\ 2 & E-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} (2E-3)*(E-2)-10=0 \\ 2E^2-7E-4=0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad r_1 = 4 \; ; \; r_2 = -\frac{1}{2}$$

Ecuación Característica

Son raíces reales distintas

Se buscan los autovectores K1, K2

Se obtiene Adj $G(4)^T$ y se toma cualquier columna

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj\ G(4)^T} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow K_1 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene Adj $G(-\frac{1}{2})^T$ y se toma cualquier columna

Notar que se podía optar por cualquier columna. Son proporcionales

$$\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj\ G(-\frac{1}{2})^T} \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow K_2 = -1\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}^h = c_1(4)^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^t \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria dependiendo del carácter del término independiente

Caso $\begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Si el sistema está igualado a términos independientes constantes, el sistema en forma matricial se puede expresar como $G(\mathrm{E})Y = K$.

Si no hay raíz nula, se ensaya la solución particular $\boldsymbol{Y_C = A}$ Reemplazando, se tiene que $G(\mathrm{E})A = K$. Teniendo en cuenta la Propiedad de que $\boldsymbol{G(\mathrm{E})A = G(1)A}$ se puede deducir que $\boldsymbol{A = G(1)^{-1}\, K = Y_C}$ es la solución completa.

$Buscamos:\quad G(1)^{-1}$

$$G(1) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\rightarrow G(1)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} \frac{37}{9} \\ \frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}^g = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}^h + \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}^c = c_1(4)^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{37}{9} \\ \frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A = G(1)^{-1}\, K}$

Para el caso RR≠ con $g(t)_1\, y g(t)_2\, constantes$

Paso 4 – hallar la solución particular a partir de las condiciones iniciales dadas

$x_0 = \frac{10}{9}; y_0 = -\frac{43}{9}$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}^g = c_1(4)^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{37}{9} \\ \frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

$$x_t = C_1(4)^t[1] + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^t[5] + \frac{37}{9}$$

$$y_t = C_1(4)^t[-1] + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^t[4] + \frac{11}{9}$$

$$\frac{10}{9} = C_1(4)^0[1] + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^0[5] + \frac{37}{9}$$

$$-\frac{43}{9} = C_1(4)^0[-1] + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^0[4] + \frac{11}{9}$$

$$\begin{cases} \frac{10}{9} = C_1 + 5\,C_2 + \frac{37}{9} \\ -\frac{43}{9} = -C_1 + 4\,C_2 + \frac{11}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -3 - 5\,C_2 = 2 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}^p = 2(4)^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^t \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{37}{9} \\ \frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

Notar que una de las raíces tiene módulo menor a 1 y otra tiene módulo mayor a 1, por ende, tiene una rama estable y otra inestable.

Ejemplo 3 :

$$Dado \begin{cases} y_{t+1} - y_t - x_t = 2^t \\ 9y_t - x_{t+1} + x_t = 5 \end{cases}$$

Se expresa el sistema en forma matricial, donde la matriz del sistema es una función de operadores G(E)

$$\begin{bmatrix} E-1 & -1 \\ 9 & -E+1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 2^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

G(E) es la matriz nxn de los polinomios operadores del sistema

vector columna de las funciones incógnita

Notar que el vector de términos independientes está conformado por dos funciones de t una exponencial y otra es una constante, se expresa como la suma de dos términos, uno por la exponencial asociado a un vector de coeficientes y otro por la constante.

paso 1 - Hallar la solución del sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo $G(\mathrm{E})X = \theta$.

$$\begin{bmatrix} E-1 & -1 \\ 9 & -E+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

¡¡¡Buscamos que sea SCI !!!

Ya que se trata de un sistema homogéneo y se desea que la solución sea diferente de la trivial, se busca que sea SCI Por propiedad de sistemas homogéneos, si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero, dicho sistema lo será. De esta manera se desarrolla su determinante y se iguala a cero para obtener la ecuación característica.

$$\begin{vmatrix} E-1 & -1 \\ 9 & -E+1 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación Característica

$$(E-1)*(-E+1)+9=0$$
$$-E^2+2E+8=0$$

$$r_1 = 4 \ ; \ r_2 = -2$$

Son raíces reales distintas

Se buscan los autovectores K1, K2

Se obtiene $Adj\ G(4)^T$ y se toma cualquier columna

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj\ G(4)^T} \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \Rightarrow K_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Se obtiene $Adj\ G(-2)^T$ y se toma cualquier columna

Notar que se podía optar por cualquier columna. Son proporcionales

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj\ G(-2)^T} \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{-3} \end{bmatrix} \Rightarrow K_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}^h = C_1(4)^t \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} + C_2(-2)^t \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

Paso 2 – Hallar la solución complementaria dependiendo del carácter del término independiente

$$\begin{bmatrix} E-1 & -1 \\ 9 & -E+1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 2^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La solución propuesta es $\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}^c = G(2)^{-1} K_1 2^t + G(1)^{-1} K_2$

$$G(2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\rightarrow G(2)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{-9}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}^c = \begin{bmatrix} \frac{-1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{-9}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 2^t + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{9} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}^c = \begin{bmatrix} \frac{-1}{8} \\ \frac{-9}{8} \end{bmatrix} 2^t + \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\rightarrow G(1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{9} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3 – Armar la solución general

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}^g = C_1 (4)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 (-2)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{8} \\ \frac{-9}{8} \end{bmatrix} 2^t + \begin{bmatrix} \frac{5}{9} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución será inestable

Ejemplo 4 :

$$Dado \begin{cases} x_{t+2} + 6x_t + 7y_t = 0 \\ y_{t+2} + 2y_t + 3x_t = 0 \end{cases}$$

Se expresa el sistema en forma matricial, donde la matriz del sistema es una función de operadores G(E)

$$\begin{bmatrix} E^2 + 6 & 7 \\ 3 & E^2 + 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

G(E) es la matriz nxn de los polinomios operadores del sistema

vector columna de las funciones incógnita

Notar que es un sistema homogéneo

paso 1 - Hallar la solución del sistema de ecuaciones en diferencias homogéneo $G(E)X = \theta$.

$$\begin{bmatrix} E^2+6 & 7 \\ 3 & E^2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

¡¡¡Buscamos que sea SCI !!!

Ya que se trata de un sistema homogéneo y se desea que la solución sea diferente de la trivial, se busca que sea SCI Por propiedad de sistemas homogéneos, si el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero, dicho sistema lo será. De esta manera se desarrolla su determinante y se iguala a cero para obtener la ecuación característica.

$$\begin{vmatrix} E^2+6 & 7 \\ 3 & E^2+2 \end{vmatrix} = 0$$

Ecuación Característica

$$(E^2+6) * (E^2+2) - 21 = 0$$
$$E^4 + 8E^2 - 9 = 0$$

$$r_1 = 1 \; ; \; r_2 = -1$$
$$r_3; \; r_4 = 0 \pm 3i$$

Son 2 raíces reales distintas y 2 raíces complejas conjugadas

Se buscan los autovectores K1, K2,k3

$$\begin{bmatrix} E^2+6 & 7 \\ 3 & E^2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene $Adj\ G(1)^T$ y se toma cualquier columna

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj\ G(1)^T} \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{7} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Se obtiene $Adj\ G(-1)^T$ y se toma cualquier columna

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj\ G(-1)^T} \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{7} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Notar que se podía optar por cualquier columna. Son proporcionales

Se obtiene $Adj\ G(3i)^T$ y se toma cualquier columna

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{7} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-7} \end{bmatrix} \xrightarrow{Adj\ G(3i)^T} \begin{bmatrix} \mathbf{-7} & -7 \\ \mathbf{-3} & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{K_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Se arma la solución homogénea que en este caso es la solución general del sistema

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix}^g = C_1(1)^t \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} + C_2(-1)^t \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} \mathbf{3}^{\boldsymbol{t}} \left[\boldsymbol{C_3 cos \frac{\pi}{2} t + C_4 sen \frac{\pi}{2} t} \right]$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\rho} \qquad \sin\theta = \frac{\beta}{\rho}$$

La solución es inestable

Como la parte real del complejo es 0 y la parte imaginaria es 3 se calcula tita de manera que satisfaga ambas expresiones. Dado que tita tiene 90 grados es equivalente a $\frac{\pi}{2}$

Linealización de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

Material complementario

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A. C. & Wainwright, K (2006) Métodos Fundamentales de Economía Matemática, 4º edición. Mc-Graw Hill Interamericana; capítulo 19.6

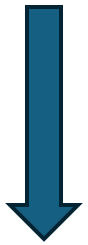
Prof.: Rita Beatriz Morrone

Dado un sistema de EDO no lineal:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y \\ y' = 1 - y \end{cases}$$

Una aproximación lineal utilizando el polinomio de Taylor, de una función cualquiera $\phi(x)$ puede dar el valor exacto de $\phi(x)$ en un punto de expansión, pero se obtienen errores de aproximación progresivamente mayores a medida que nos alejamos de dicho punto de expansión.

Por ende, se puede aplicar el mismo concepto a un sistema no lineal ya que en el o los puntos de equilibrio (puntos de expansión) la aproximación lineal puede localizar el mismo/s equilibrio/s que el sistema original no lineal.



Además, en el entorno del punto/s de equilibrio, la aproximación lineal, tendría la misma configuración de las líneas de corriente que el sistema no lineal.

Una técnica cualitativa para analizar un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales es realizar una aproximación lineal de ese sistema, mediante una expansión de Taylor del sistema dado alrededor de su punto/s de equilibrio

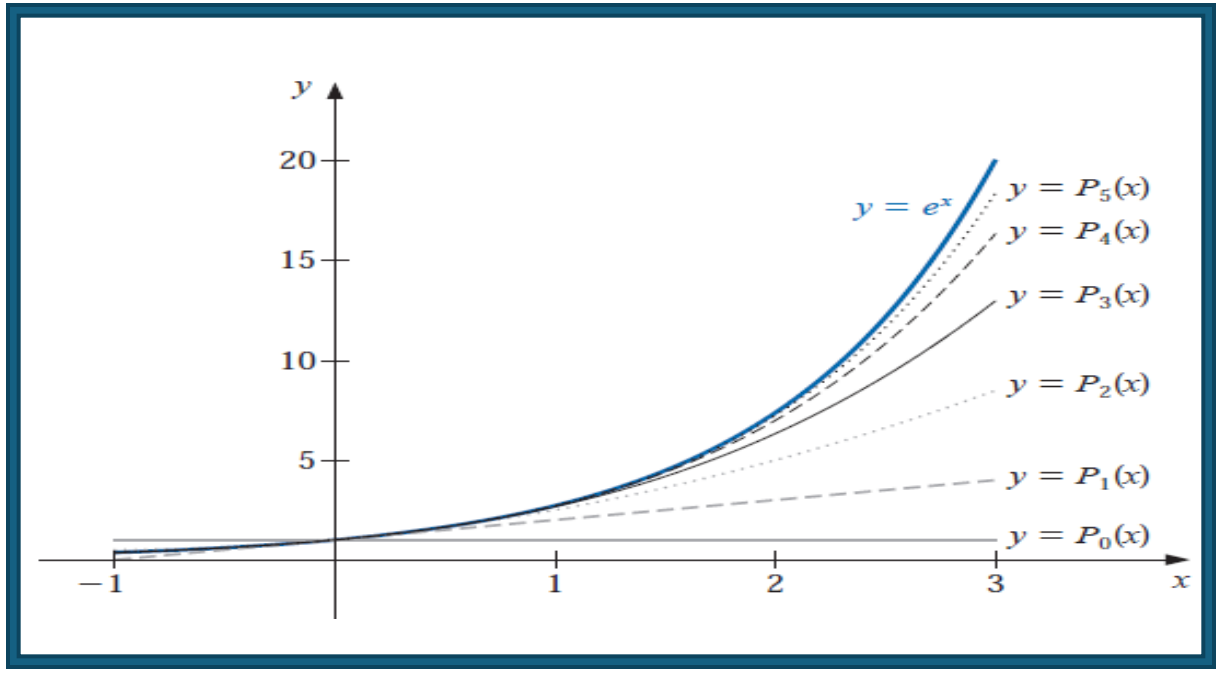
Polinomio de Taylor

(Teorema de Taylor)
Suponga que $f \in C^n[a, b]$, que $f^{(n+1)}$ existe en $[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$, existe un número $\xi(x)$ entre x_0 y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ y $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

- Los Polinomios de Taylor coinciden en lo posible con determinada función en un punto específico y concentran su exactitud cerca de éste.



Repaso en funciones de una sola variable independiente

Dada $y = f(x)$ n+1 diferenciable en el punto x_0. El valor de la función en un entorno de x_0 puede expresarse como:

$$f(x)_{|E(x_0)} \cong f(x_0) + df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0)}{3!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0)}{n!}$$

$$f(x)_{|E(x_0)} \cong f(x_0) + f'(x_0)dx + \frac{f''(x_0)dx^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)dx^3}{3!} + \cdots + \frac{f^n(x_0)dx^n}{n!}$$

$$\overbrace{f(x)_{|E(x_0)}}^{Valor\ de\ la\ función\ en\ un\ entorno\ de\ P_0} \cong \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!} + \cdots + \frac{f^n(x_0)(x - x_0)^n}{n!}}^{Polinomio\ de\ Taylor\ de\ orden\ n\ alrededor\ de\ x_0: P_n(x)_|}$$

En el caso particular en que $x_0 = 0$ el polinomio se conoce como Polinomio de MacLaurin.

$$P_n(x)_{|E(0)} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \cdots + \frac{f^n(0)x^n}{n!}$$

Funciones de dos variables independientes

Dada $z = f(x;y)$ n+1 diferenciable en el punto $P_0 = (x_0;y_0)$. El valor de la función en un entorno de $(x_0;y_0)$ puede expresarse como:

Polinomio de Taylor de orden n: $P_n(x;y)_{|E(x_0;y_0)}$

$$\boldsymbol{f(x;y)_{|E(x_0;y_0)} \cong f(x_0;y_0) + df(x_0;y_0) + \frac{d^2 f(x_0;y_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0;y_0)}{3!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0;y_0)}{n!}}$$

Desarrollando los diferenciales hasta el segundoo orden se obtiene el polinomio de Taylor de grado 2:

$$P_2(x;y)_{|E(x_0;y_0)} = f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0)dx + f'_y(x_0;y_0)dy + \frac{f''_{xx}(x_0;y_0)dx^2 + 2f''_{xy}(x_0;y_0)dxdy + f''_{yy}(x_0;y_0)dy^2}{2!}$$

$$P_2(x;y)_{|E(x_0;y_0)} = f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0;y_0)(y-y_0) + \frac{f''_{xx}(x_0;y_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0;y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f''_{yy}(x_0;y_0)(y-y_0)^2}{2!}$$

En el caso particular en que $(x_0;y_0) = (0;0)$ el polinomio se conoce como Polinomio de MacLaurin y la fórmula deviene:

$$P_n(x;y)_{|E(0;0)} = f(0;0) + f'_x(0;0)\,x + f'_y(0;0)\,y + \frac{f''_{xx}(0;0)\,x^2 + 2f''_{xy}(0;0)\,x\,y + f''_{yy}(0;0)\,y^2}{2!} + \frac{f'''_{xxx}(0;0)\,x^3 + 3f'''_{xxy}(0;0)\,x^2\,y + 3f'''_{xyy}(0;0)\,x\,y^2 + f'''_{yyy}(0;0)\,y^3}{3!} + \cdots$$

Polinomio de Taylor y linealización

$$f(x;y) = f(x0;y0) + f'x(x0;y0)dx + f'y(x0;y0)dy + \frac{1}{2!}[f''xx(x0;y0)dx^2 + 2f''xy(x0;y0)dxdy + f''yy(x0;y0)dy^2] + \frac{1}{3!}[f'''xxx(x0;y0)dx^3 + 3f'''xxy(x0;y0)dx^2dy + 3f'''xyy(x0;y0)dxdy^2 + f'''yyy(x0;y0)dy^3] + \cdots + Tn + 1$$

A partir de la serie de Taylor de una función, la aproximación lineal se obtiene anulando todos los términos de orden mayor que uno.

$$\begin{cases} x' = x^2 - y \\ y' = 1 - y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x' = f(x;y) \\ y' = g(x;y) \end{cases}$$

Su linealización alrededor del punto de expansión puede escribirse como

$$\begin{cases} x' = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ y' = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases}$$

Linealización reducida

Para propósito del análisis local de estabilidad, la linealización puede exponerse en una forma más sencilla

Considerando que el punto de equilibrio del sistema es el punto de expansión $(\bar{x}; \bar{y})$, se debe reemplazar $(x_0; y_0)$ por $(\bar{x}; \bar{y})$

Además, en el punto de equilibrio →

$$x' = y' = 0$$

$$f(\bar{x}; \bar{y}) = g(\bar{x}; \bar{y}) = 0$$

$$\begin{cases} x' = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ y' = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases}$$

Reemplazando $(x_0; y_0)$ por $(\bar{x}; \bar{y})$

$$\begin{cases} x' = f(\bar{x}; \bar{y}) + f_x(\bar{x}; \bar{y})(x - \bar{x}) + f_y(\bar{x}; \bar{y})(y - \bar{y}) \\ y' = g(\bar{x}; \bar{y}) + g_x(\bar{x}; \bar{y})(x - \bar{x}) + g_y(\bar{x}; \bar{y})(y - \bar{y}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = f(\bar{x};\bar{y}) + f_x(\bar{x};\bar{y})(x-\bar{x}) + f_y(\bar{x};\bar{y})(y-\bar{y}) \\ y' = g(\bar{x};\bar{y}) + g_x(\bar{x};\bar{y})(x-\bar{x}) + g_y(\bar{x};\bar{y})(y-\bar{y}) \end{cases}$$

Dado que $f(\bar{x};\bar{y}) = g(\bar{x};\bar{y}) = 0$

$$\begin{cases} x' = f_x(\bar{x};\bar{y})(x-\bar{x}) + f_y(\bar{x};\bar{y})(y-\bar{y}) \\ y' = g_x(\bar{x};\bar{y})(x-\bar{x}) + g_y(\bar{x};\bar{y})(y-\bar{y}) \end{cases}$$

Distribuyendo términos y reordenando

$$\begin{cases} x' = f_x(\bar{x};\bar{y})x - f_x(\bar{x};\bar{y})\bar{x} + f_y(\bar{x};\bar{y})y - f_y(\bar{x};\bar{y})\bar{y} \\ y' = g_x(\bar{x};\bar{y})x - g_x(\bar{x};\bar{y})\bar{x} + g_y(\bar{x};\bar{y})y - g_y(\bar{x};\bar{y})\bar{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - f_x(\bar{x};\bar{y})x - f_y(\bar{x};\bar{y})y = -f_x(\bar{x};\bar{y})\bar{x} - f_y(\bar{x};\bar{y})\bar{y} \\ y' - g_x(\bar{x};\bar{y})x - g_y(\bar{x};\bar{y})y = -g_x(\bar{x};\bar{y})\bar{x} - g_y(\bar{x};\bar{y})\bar{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - f_x(\bar{x};\bar{y})x - f_y(\bar{x};\bar{y})y = -f_x(\bar{x};\bar{y})\bar{x} - f_y(\bar{x};\bar{y})\bar{y} \\ y' - g_x(\bar{x};\bar{y})x - g_y(\bar{x};\bar{y})y = -g_x(\bar{x};\bar{y})\bar{x} - g_y(\bar{x};\bar{y})\bar{y} \end{cases}$$

Cada término situado a la derecha del signo de igualdad representa una constante. Apartando estos términos constantes de modo que ahora podamos anularlos, se puede llegar a las ecuaciones reducidas de la linealización y expresarlo de forma matricial.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dado que el análisis cualitativo depende exclusivamente del conocimiento de las raíces características, las cuales a su vez dependen sólo de las ecuaciones reducidas de un sistema, es todo lo que necesitamos para el análisis local de estabilidad deseado

Se puede observar que la única propiedad distintiva de la linealización reducida radica la matriz jacobiana del sistema no lineal evaluada para el equilibrio. Así́ en el análisis final, la estabilidad o inestabilidad local del equilibrio se basa sólo en la composición de dicho jacobiano.

$$J_E = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Análisis local de estabilidad

Siguiendo el razonamiento previo, la ecuación característica de la linealización reducida debe ser:

$$\begin{vmatrix} r-a & -b \\ -c & r-d \end{vmatrix} = r^2 - (a+d)r + (ad-bc) = 0$$

$$\begin{vmatrix} r-f_x & f_y \\ g_x & r-g_y \end{vmatrix} = r^2 - (f_x+g_y)r + (f_x g_y - f_y g_x) = 0$$

$ad - bc = |J_E|$

$a + d = \operatorname{tr} J_E$

$$r_1, r_2 = \frac{\operatorname{tr} J_E \pm \sqrt{(\operatorname{tr} J_E)^2 - 4|J_E|}}{2}$$

Relaciones útiles

$$r_1 + r_2 = \operatorname{tr} J_E$$

$$r_1 r_2 = |J_E|$$

Caso 1 $(\text{tr } J_E)^2 > 4|J_E|$

Raíces reales distintas

$$
\begin{array}{lllll}
(i) & r_1 < 0, r_2 < 0 & \Rightarrow & |J_E| > 0; \text{tr } J_E < 0 & \rightarrow \text{Nodo estable} \\
(ii) & r_1 > 0, r_2 > 0 & \Rightarrow & |J_E| > 0; \text{tr } J_E > 0 & \rightarrow \text{Nodo inestable} \\
(iii) & r_1 > 0, r_2 < 0 & \Rightarrow & |J_E| < 0; \text{tr } J_E \gtreqless 0 & \rightarrow \text{Punto silla}
\end{array}
$$

Caso 2 $(\text{tr } J_E)^2 = 4|J_E|$

Raíces reales iguales

$$
\begin{array}{lllll}
(iv) & r_1 < 0, r_2 < 0 & \Rightarrow & |J_E| > 0; \text{tr } J_E < 0 & \rightarrow \text{Nodo estable} \\
(v) & r_1 > 0, r_2 > 0 & \Rightarrow & |J_E| > 0; \text{tr } J_E > 0 & \rightarrow \text{Nodo inestable}
\end{array}
$$

Caso 3 $(\text{tr } J_E)^2 < 4|J_E|$

Raíces complejas conjugadas

$$\text{tr } J_E = r_1 + r_2 = (h + vi) + (h - vi) = 2h$$
$$|J_E| = r_1 r_2 = (h + vi)(h - vi) = h^2 + v^2$$

$$
\begin{array}{lllll}
(vi) & h < 0 & \Rightarrow & |J_E| > 0; \text{tr } J_E < 0 & \rightarrow \text{Foco estable} \\
(vii) & h > 0 & \Rightarrow & |J_E| > 0; \text{tr } J_E > 0 & \rightarrow \text{Foco inestable} \\
(viii) & h = 0 & \Rightarrow & |J_E| > 0; \text{tr } J_E = 0 & \rightarrow \text{Vórtice}
\end{array}
$$

Volviendo al ejemplo inicial y aplicando los conceptos

$$\begin{cases} x' = x^2 - y \\ y' = 1 - y \end{cases}$$

Paso 1 – Identificar punto/s de equilibrio

Al considerar $\boldsymbol{x' = y' = 0}$

$0 = x^2 - y$ $\rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \boldsymbol{x = 1; x = -1}$

$0 = 1 - y$ $\rightarrow \boldsymbol{y = 1}$

$E_1 = (1; 1)$

$E_2 = (-1; 1)$

Paso 2 – Realizar la linealización

Para este caso se precisan dos linealizaciones reducidas por separado ya que hay 2 equilibrios

$$E_1 = (1;1)$$

$$\begin{cases} x' = x^2 - y \\ y' = 1 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = f_x(1;1)(x-1) + f_y(1;1)(y-1) \\ y' = g_x(1;1)(x-1) + g_y(1;1)(y-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - f_x(1;1)x - f_y(1;1)y = -f_x(1;1)1 - f_y(1;1)1 \\ y' - g_x(1;1)x - g_y(1;1)y = -g_x(1;1)1 - g_y(1;1)1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J_E = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

$$E_2 = (-1;1)$$

$$\begin{cases} x' = x^2 - y \\ y' = 1 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = f_x(-1;1)(x+1) + f_y(-1;1)(y-1) \\ y' = g_x(-1;1)(x+1) + g_y(-1;1)(y-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - f_x(-1;1)x - f_y(-1;1)y = -f_x(-1;1)(-1) - f_y(-1;1)1 \\ y' - g_x(-1;1)x - g_y(-1;1)y = -g_x(-1;1)(-1) - g_y(-1;1)1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J_E = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

Paso 3 – Interpretar la dinámica

$$r_1, r_2 = \frac{\text{tr } J_E \pm \sqrt{(\text{tr } J_E)^2 - 4|J_E|}}{2}$$

$$E_1 = (1; 1)$$

$$J_E = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$tr\ J_{E_1} = 1 > 0$$

$$|J_{E_1}| = -2 < 0$$

$$r_1, r_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

ES UN PUNTO SILLA , TIENE UNA RAÍZ POSITIVA Y OTRA NEGATIVA

$$E_2 = (-1; 1)$$

$$J_E = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$tr\ J_{E_2} = -3 < 0$$

$$|J_{E_2}| = 2 > 0$$

$$r_1, r_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

ES UN NODO ESTABLE , TIENE AMBAS RAÍCES NEGATIVAS

Otro ejemplo:

$$\begin{cases} x' = x^3 + 3x^2y + y \\ y' = x(1 + y^2) \end{cases}$$

Paso 1 – Identificar punto/s de equilibrio

Al considerar $\boldsymbol{x' = y' = 0}$

$0 = x^3 + 3x^2y + y$ $\quad \boldsymbol{\rightarrow y = 0}$

$0 = x(1 + y^2)$ $\quad \boldsymbol{\rightarrow x = 0}$

$$E_1 = (0; 0)$$

Paso 2 – Realizar la linealización

$$\begin{cases} x' = x^3 + 3x^2y + y \\ y' = x(1 + y^2) \end{cases}$$

$$E_1 = (0;0)$$

$$\begin{cases} x' = f_x(0;0)(x-0) + f_y(0;0)(y-0) \\ y' = g_x(0;0)(x-0) + g_y(0;0)(y-0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - f_x(0;0)x - f_y(0;0)y = -f_x(0;0)0 - f_y(0;0)0 \\ y' - g_x(0;0)x - g_y(0;0)y = -g_x(0;0)0 - g_y(0;0)0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3x^2 + 6xy & 3x^2 + 1 \\ 1 + y^2 & 2xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_E \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Paso 3 – Interpretar la dinámica

$$r_1, r_2 = \frac{\text{tr } J_E \pm \sqrt{(\text{tr } J_E)^2 - 4|J_E|}}{2}$$

$$E_1 = (0; 0)$$

$$J_E = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_1, r_2 = \frac{0 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$$

$$tr\ J_{E_1} = 0$$

$$\left|J_{E_1}\right| = -1 < 0$$

ES UN PUNTO SILLA , TIENE UNA RAÍZ POSITIVA Y OTRA NEGATIVA

Otro ejemplo:

$$\begin{cases} x' = 1 - e^y \\ y' = 5x - y \end{cases}$$

Paso 1 – Identificar punto/s de equilibrio

Al considerar $\boldsymbol{x' = y' = 0}$

$0 = 1 - e^y$ $\rightarrow \boldsymbol{y = 0}$

$0 = 5x - y$ $\rightarrow \boldsymbol{x = 0}$

$E_1 = (0; 0)$

Paso 2 – Realizar la linealización

$$\begin{cases} x' = 1 - e^{y} \\ y' = 5x - y \end{cases}$$

$$E_1 = (0;0)$$

$$\begin{cases} x' = f_x(0;0)(x-0) + f_y(0;0)(y-0) \\ y' = g_x(0;0)(x-0) + g_y(0;0)(y-0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' - f_x(0;0)x - f_y(0;0)y = -f_x(0;0)0 - f_y(0;0)0 \\ y' - g_x(0;0)x - g_y(0;0)y = -g_x(0;0)0 - g_y(0;0)0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -e^{y} \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J_E \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}}$$

Paso 3 – Interpretar la dinámica

$$r_1, r_2 = \frac{\text{tr } J_E \pm \sqrt{(\text{tr } J_E)^2 - 4|J_E|}}{2}$$

$$E_1 = (0; 0)$$

$$J_E = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$r_1, r_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 20}}{2}$$

$$tr\ J_{E_1} = -1 < 0$$

$$\left|J_{E_1}\right| = 5 > 0$$

ES UN FOCO ESTABLE, SON RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS CON PARTE REAL NEGATIVA

.UBA económicas
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

Cálculo de variaciones

Material complementario

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A., Elements Of Dynamic Optimization, parte 2

Prof.: Rita Beatriz Morrone

Cálculo de Variaciones aplicado a la resolución de problemas de optimización dinámica.

Optimización dinámica

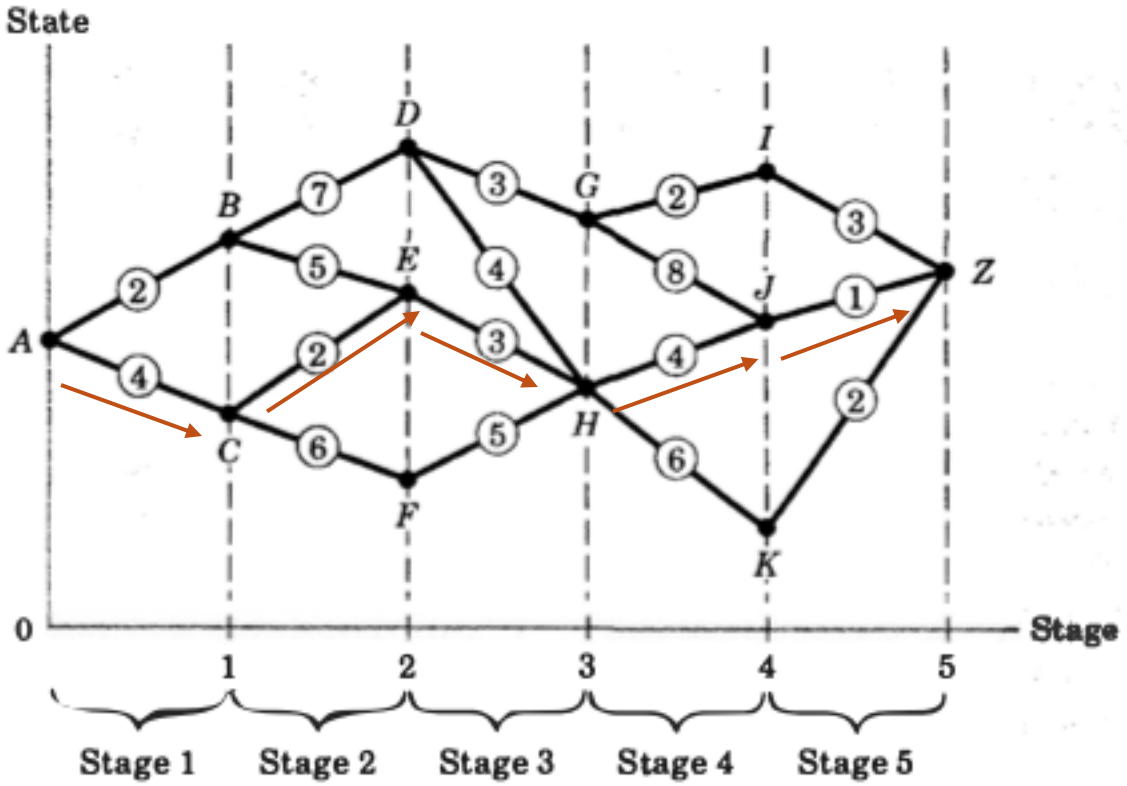
- Implica tomar decisiones óptimas a lo largo de un período de tiempo o una secuencia de etapas
- A diferencia de la optimización miópica de una etapa a la vez, considera el **período de planificación completo**
- Busca identificar un **camino óptimo** (secuencia de decisiones o estados a lo largo del tiempo)

Variables clave:

- **Etapa:** A menudo representa el tiempo
- **Estado:** La condición o posición del sistema en una etapa dada.
- **Senda:** La trayectoria del estado a lo largo de las etapas.
- **Valor de la Senda:** El resultado total (costo, beneficio, utilidad) asociado a un camino particular.

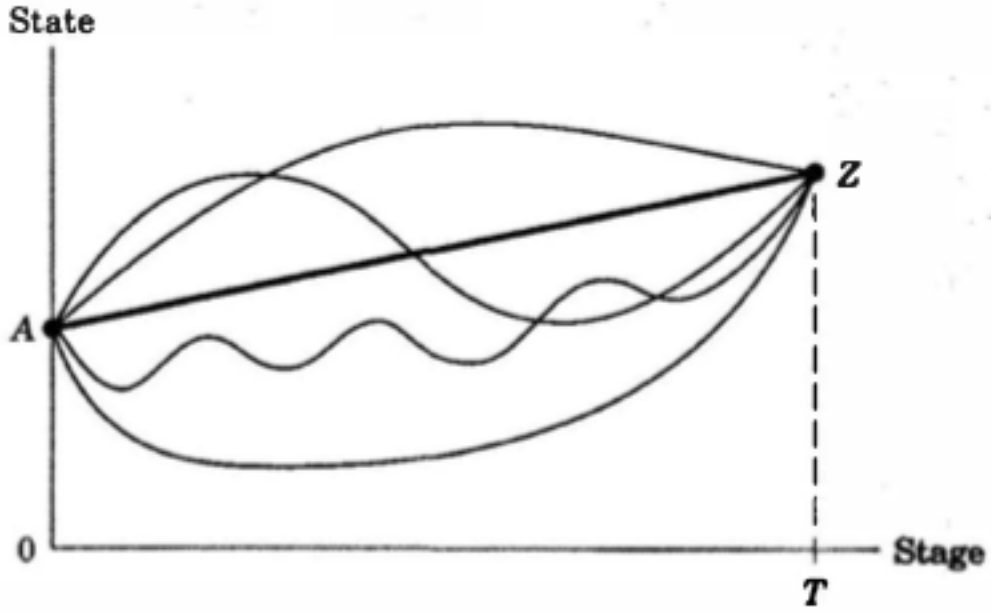
En optimización dinámica, el objetivo es maximizar o minimizar el valor de un funcional, que asigna un valor a una trayectoria o camino completo. El funcional a menudo toma la forma de una integral definida a lo largo de un intervalo de tiempo [0, T]

En tiempo discreto



Se busca el mínimo costo de producción

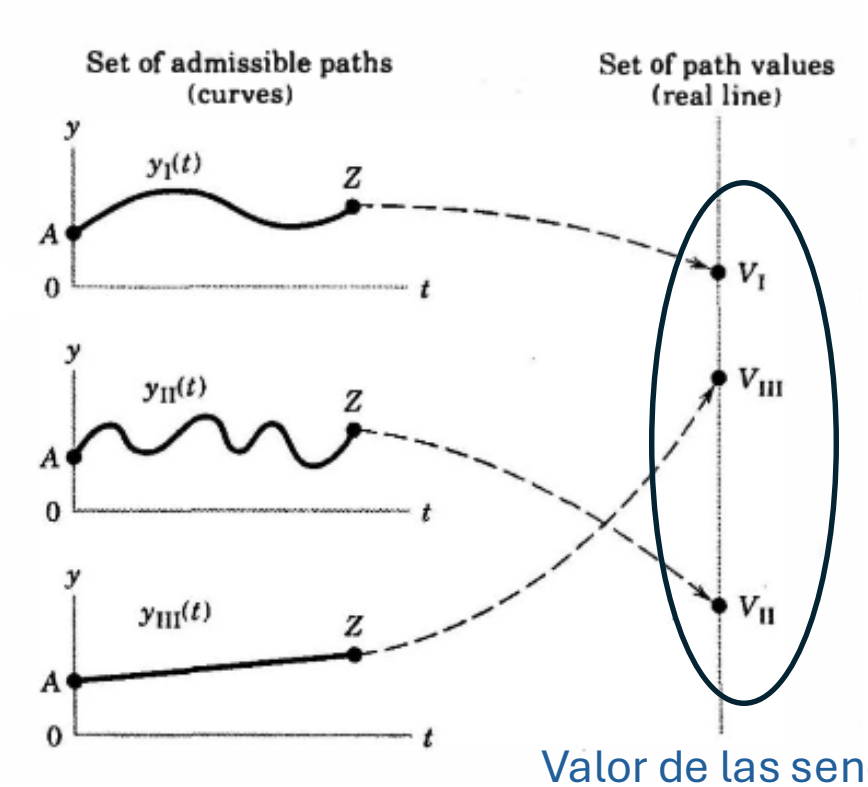
En tiempo continuo



Se busca el trayecto más corto

Elementos de un problema de optimización dinámica

- 1- Un punto inicial y un punto terminal
- 2- Un set de sendas posibles entre el punto inicial y el terminal
- 3- Un valor total de cada senda (costo, beneficio, etc)
- 4- Un objetivo específico, maximizar o minimizar el valor de la senda para elegir la óptima



Valor de las sendas

El Problema Fundamental del Cálculo de Variaciones

Funcional objetivo donde V es una función de $y(t)$

$$V[y(t)] = \int_0^T F\left(t, y_{(t)}, y'_{(t)}\right)dt$$

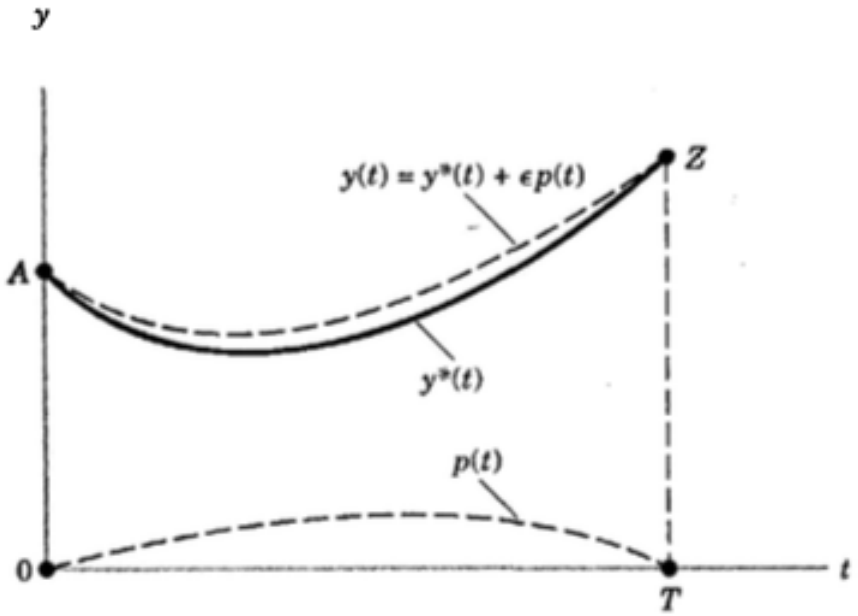
Problema fundamental del cálculo de variaciones

$$V[y(t)] = \int_0^T F\left(t, y_{(t)}, y'_{(t)}\right)dt \quad sa \quad y(0) = A\ , y(T) = Z$$

Funciones admisibles: Curvas continuas con derivadas continuas (suaves), y el integrando F es dos veces diferenciable

Condición de primer orden →

La **ecuación de Euler** constituye la condición necesaria básica para encontrar un **extremo** (una trayectoria suave que produce un valor extremo del funcional)



- Se basa en la idea de que, en un extremo, una pequeña "variación" (o perturbación) de la trayectoria óptima no debe cambiar el valor del funcional en primer orden.
- La ecuación de Euler es, en general, una **ecuación diferencial no lineal de segundo orden**, y su solución general contendrá dos constantes arbitrarias.
- Estas constantes se definen usando las dos condiciones de contorno dadas (y(0)=A, y(T)=Z)

La ecuación de Euler

$$V[y(t)] = \int_0^T F\left(t, y_{(t)}, y'_{(t)}\right)dt \quad sa \quad y(0) = A\,, y(T) = Z$$

Condición de primer orden ⟹ $\left.\frac{dV}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0$

Deducción

Paso 1- Expresar V en términos de ϵ y obtener la derivada $\frac{dV}{d\epsilon}$ usando la regla de Leibniz

$$V[\epsilon] = \int_0^T F\left(t, \boldsymbol{y^*_{(t)} + \epsilon p_{(t)}}, \boldsymbol{y^{*\prime}_{(t)} + \epsilon p^{*\prime}_{(t)}}\right)dt$$

$$\frac{dV}{d\epsilon} = \int_0^T \frac{\partial F}{\partial \epsilon}dt = \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{d\epsilon}\right)dt = \int_0^T \left[\boldsymbol{F_y p_{(t)} + F_{y'} p'_{(t)}}\right]\boldsymbol{dt}$$

Separando la expresión en dos integrales y planteando la condición de primer orden $\frac{dV}{d\epsilon} = 0$

$$\int_0^T \boldsymbol{F_y p_{(t)}}\, \boldsymbol{dt} + \int_0^T \boldsymbol{F_{y'} p'_{(t)}}\, \boldsymbol{dt} = \boldsymbol{0}$$

Para que pueda resolverse se debe eliminar $\boldsymbol{p_{(t)}}$; $\boldsymbol{p'_{(t)}}$ de la expresión

Paso 2 - Integramos por partes el segundo término con la finalidad de eliminar $p'_{(t)}$

$$\int_0^T F_y p_{(t)}\, dt + \underbrace{\int_0^T F_{y'} p'_{(t)}\, dt}_{u \quad dv} = 0$$

$$u(t) = F_{y'} \qquad du = \frac{dF_{y'}}{dt}\, dt$$
$$v(t) = p_{(t)} \qquad dv = p'_{(t)} dt$$

$$\int_0^T F_{y'} p'_{(t)}\, dt = \left[F_{y'} p_{(t)}\right]_0^T - \int_0^T p_{(t)} \frac{dF_{y'}}{dt}\, dt$$

Como $p_{(t)} = p_{(0)} = 0$, el término evaluado en los límites se anula, y nos queda:

$$\int_0^T F_{y'} p'_{(t)}\, dt = -\int_0^T p_{(t)} \frac{d}{dt} F_{y'}\, dt$$

Sustituyendo de vuelta en la ecuación:

$$\int_0^T F_y p_{(t)}\, dt - \int_0^T p_{(t)} \frac{d}{dt} F_{y'}\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^T \left(F_y - \frac{d}{dt} F_{y'}\right) p_{(t)}\, dt = 0$$

Paso 3 – Reformular la condición

$$\int_0^T \left(F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} \right) p_{(t)} \, dt = 0$$

En esta expresión $p_{(t)}$ entra de forma arbitraria, por lo cual se puede concluir que la condición necesaria para extremar el funcional objetivo puede satisfacerse sólo si se hace que la expresión entre paréntesis se anule para cada valor de t en el extremo; de lo contrario, la integral puede no ser igual a cero para alguna curva perturbadora admisible.

Como $p_{(t)}$ es arbitraria (excepto por las condiciones de frontera), el término entre paréntesis debe ser idénticamente cero para que la integral se anule siempre, y la condición necesaria será

ECUACIÓN DE EULER

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0 \qquad \forall \, t \in [0, \ldots T]$$

Paso 4- Expandir la ecuación de Euler

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = 0 \qquad \forall\, t \in [0, \ldots T]$$

La naturaleza de esta ecuación se puede aclarar al desarrollar la derivada $\frac{d}{dt} F_{y'}$ en una forma más explícita. Dado que F es una función con tres argumentos (t, y, y') , la derivada consta de los siguientes tres términos:

$$\frac{dF_{y'}}{dt} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial t} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dt}$$

$$= F_{ty'} + F_{yy'}y'(t) + F_{y'y'}y''(t)$$

Sustituyendo la derivada desarrollada en la ecuación de Euler , multiplicando por -1 y reordenando :

ECUACIÓN DE EULER

$$\boldsymbol{F_{y'y'}y''_{(t)} + F_{yy'}y'_{(t)} + F_{ty'} - F_y = 0}$$

$$\forall\, t \;\in [0, \ldots T]$$

En general es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden . Se deben usar las condiciones de frontera para definir las dos constantes arbitrarias

Ejemplo 1

$$V[y] = \int_0^2 (12ty + y'^2)\, dt \qquad \text{Con } y(0) = 0 \;;\; y(2) = 8$$

Paso 1 – Condición necesaria para extremar el funcional objetivo – Ecuación de Euler

$$\boldsymbol{F_{y'y'}y''_{(t)} + F_{yy'}y'_{(t)} + F_{ty'} - F_y = 0}$$

$$F_y = 12t \qquad F_{y'} = 2y' \qquad F_{y'y'} = 2 \qquad F_{yy'} = F_{ty'} = 0$$

$$\boldsymbol{2y''_{(t)} - 12t = 0} \xrightarrow{\text{despejando}} \boldsymbol{y''_{(t)} = 6t}$$

Paso 2 – resolver la ecuación de Euler y aplicar las condiciones de contorno

$$y''_{(t)} = 6t$$

Realizando la primera integración: $$y' = \int 6t\, dt = 3t^2 + C_1$$

Realizando la segunda integración: $$y = \int (3t^2 + C_1)\, dt = t^3 + C_1 t + C_2$$

Aplicamos las condiciones de contorno para hallar las constantes arbitrarias

$y(0) = 0 \;;\; y(2) = 8$

Para $t = 0$ $\quad y(0) = 0^3 + C_1.0 + C_2 \rightarrow\rightarrow C_2 = 0$

Para $t = 2$ $\quad y(2) = 2^3 + C_1.2 \rightarrow\rightarrow 8 + 2C_1 = 8 \rightarrow\rightarrow C_1 = 0$

$$y^*_{(t)} = t^3$$

Paso 3 – verificar condiciones de frontera y suficiencia

$$y^*_{(t)} = t^3 \longrightarrow$$

$$y(0) = 0^3 = 0$$

$$y(2) = 2^3 = 8$$

$$V[y] = \int_0^2 (12ty + y'^2)\, dt$$

Verificando concavidad/convexidad

$$q = F_{y'y'}\, dy'^2 + 2F_{y'y}\, dy'\, dy + F_{yy}\, dy^2$$

$$|D| \equiv \begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'y} \\ F_{yy'} & F_{yy} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La función es convexa, se cumple suficiencia para un mínimo

Otra forma de verificar suficiencia es a través de la condición de Legendre:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Y'^2} \geq 0 \ \forall t \in [0,2]$$

Suficiencia para un mínimo

Ejemplo 2

$$V[y] = \int_1^5 \left[3t + (y')^{1/2}\right] dt \qquad \text{Con } y(1) = 3 \;;\; y(5) = 7$$

Paso 1 – Condición necesaria para extremar el funcional objetivo – Ecuación de Euler

$$\boldsymbol{F_{y'y'}y''_{(t)} + F_{yy'}y'_{(t)} + F_{ty'} - F_y = 0}$$

$$\boldsymbol{F_y = 0} \qquad \boldsymbol{F_{y'}} = \frac{1}{2}(y')^{\frac{-1}{2}} \qquad \boldsymbol{F_{y'y'}} = -\frac{1}{4}(y')^{\frac{-3}{2}} \qquad \boldsymbol{F_{yy'} = F_{ty'} = 0}$$

$$-\frac{1}{4}(y')^{\frac{-3}{2}}\boldsymbol{y''_{(t)}} = 0$$

despejando

$$\boldsymbol{y''_{(t)} = 0}$$

Paso 2 – resolver la ecuación de Euler y aplicar las condiciones de contorno

$$y''_{(t)} = 0$$

Realizando la primera integración: $$y' = \int 0\, dt = C_1$$

Realizando la segunda integración: $$y = \int (C_1)\, dt = C_1 t + C_2$$

Aplicamos las condiciones de contorno para hallar las constantes arbitrarias

$y(1) = 3 \;;\; y(5) = 7$

Para $t = 1$ $\quad y(1) = C_1.1 + C_2 \rightarrow\rightarrow C_1 + C_2 = 3 \rightarrow\rightarrow C_1 = 3 - C_2$

Para $t = 5$ $\quad y(5) = 5C_1 + C_2 = 7 \rightarrow\rightarrow 5(3 - C_2) + C_2 = 7$

$$\rightarrow\rightarrow 15 - 5C_2 + C_2 = 7 \rightarrow\rightarrow -4C_2 = -8 \rightarrow\rightarrow C_2 = 2; C_1 = 1$$

$$y^*_{(t)} = t + 2$$

Paso 3 – verificar condiciones de frontera y suficiencia

$$y^*_{(t)} = t + 2 \longrightarrow \begin{aligned} y(1) &= 1 + 2 = 3 \\ y(5) &= 5 + 2 = 7 \end{aligned}$$

$$V[y] = \int_1^5 \left[3t + (y')^{1/2}\right] dt$$

Verificando concavidad/convexidad

$$q = F_{y'y'}\, dy'^2 + 2F_{y'y}\, dy'\, dy + F_{yy}\, dy^2$$

$$|D| \equiv \begin{vmatrix} F_{y'y'} & F_{y'y} \\ F_{yy'} & F_{yy} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}(y')^{\frac{-3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Otra forma de verificar suficiencia es a través de la condición de Legendre:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Y'^2} \leq 0 \ \forall t \in [1,5]$$

La función es convexa, se cumple suficiencia para un máximo

Suficiencia para un máximo

.UBA económicas
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

Control Óptimo Continuo

Material complementario

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A., Elements Of Dynamic Optimization, parte 3

Prof.: Rita Beatriz Morrone

Elementos que conforman el problema de optimización :

Función objetivo → $V = \int_0^T F[t, u(t), y(t)]dt$

$F(t, u, y)$ muestra la forma en que la $variable\ de\ control\ (u)$ para el tiempo t, junto con la $variable\ de\ estado\ (y)$ para el tiempo t, determinan el objeto de maximización para el tiempo t.

Variable de control → $u(t)$

La variable de control la elige un agente para optimizar la función objetivo, **está sujeta a su accionar** y altera el valor de la variable de estado a través de la *ecuación de movimiento*

Variable de estado → $y(t)$

La variable de estado no es directamente controlable por el agente, refleja el resultado del problema, evoluciona en el tiempo; tiene un movimiento autónomo

Restricción
(ecuación del movimiento)

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = g[t, u(t), y(t)]$$

Es la derivada de la variable de estado con respecto al tiempo

muestra el mecanismo mediante el cual, en el tiempo, se tienen cambios de la variable de estado debido a la elección de la de control

La función $g(*)$ determina la dirección de crecimiento de la variable de estado y su trayectoria en el tiempo.

Dado, un agente optimizador que elige la senda óptima de la variable de control,

La función objetivo se afecta tanto de manera directa → mediante la variable u,

como de manera indirecta → mediante la variable y, (que está definida por la ecuación de movimiento)

Planteo del problema

v.control

$$max \int_0^T F(t, y, u) \quad dt \quad s.a. \quad \dot{y} = f(t, y, u)$$

v.de estado

$$y(0) = y_0, \quad y(T) \quad libre$$

$$u(t) \in U \quad \forall t \in [0,T]$$

Función objetivo : Se busca obtener $(u_i^*; y_i^*) \forall i \{0 \ldots . T\}$ durante un horizonte temporal
De t=0 a t=T

Ecuación del movimiento: Indica como u(t) traduce un patrón de movimiento para y(t)

Valor inicial y final de la variable de estado

Dominio de la variable de control

Dado un el intervalo de tiempo → (finito $[O, T]$, o infinito $[0, \infty]$),

Objetivo principal: → determinar las trayectorias temporales de las variables $de \quad control\, u(t)$ y $de\ estado\ y(t)$ que optimicen la función objetivo.

Se busca el valor óptimo de una variable de elección en cada momento del período, (detallando el mejor valor de la variable hoy, mañana, y así sucesivamente, hasta el final del período de planificación).

Principio de Máximo de Pontryagin

$$H(t, y, u, \lambda) \equiv F(t, y, u) + \lambda(t) f(t, y, u)$$

$\lambda(t)$ es la variable de coestado y mide el precio sombra de la variable estado

condiciones del principio de máximo de Pontryagin (CPMP)

$$(i) \quad H(t, y, u^*, \lambda) \geq H(t, y, u, \lambda) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$(ii) \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (ec\,.\,estado)$$

$$(iii) \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (ec\,.\,co-estado)$$

$$(iv) \quad \lambda(T) = 0 \quad (cond\,.\,transversalidad)$$

- La ecuación (*i*) puede convertirse, siempre que el Hamiltoniano sea diferenciable con respecto a $u(t)$ y devuelva una solución interna, en:

$$(i\,.\,bis) \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Para poder completar el planteo de la resolución se necesitan las condiciones iniciales y finales de la variable de estado.

En este planteo, la condición inicial viene dada y la condición final estipula que $y(t)$ puede tomar cualquier valor. Sin embargo, en algunos problemas, se debe plantear una *condición de transversalidad* debido a que su valor final se encuentra restringido por alguna condición.

Punto Terminal Fijo: es decir, $y(T) = y_T$, lo que implica un valor constante para el último período. En este caso, la condición de transversalidad es justamente esta relación.

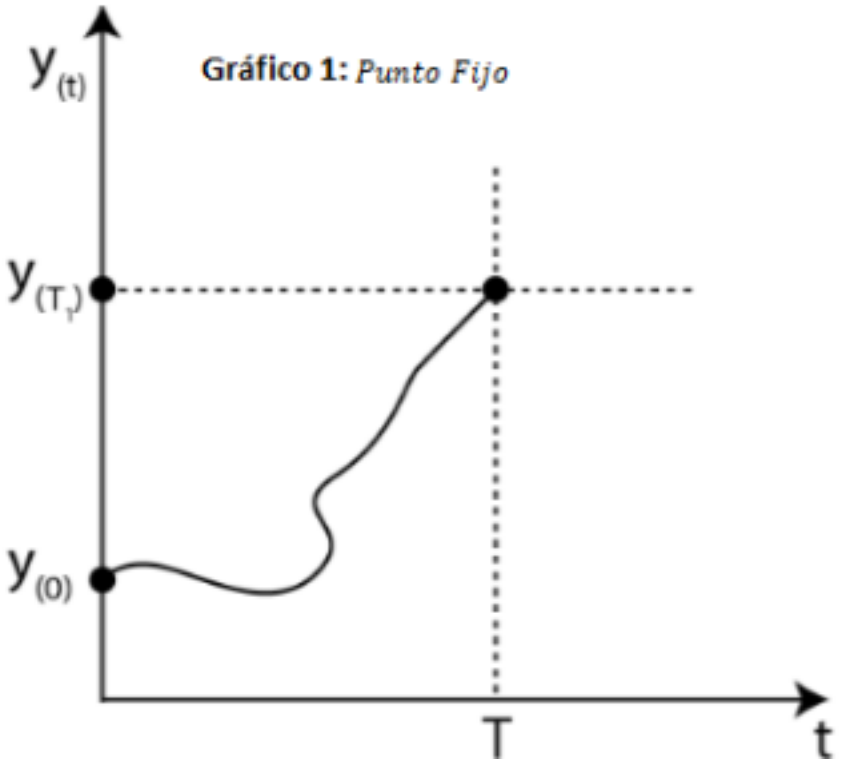
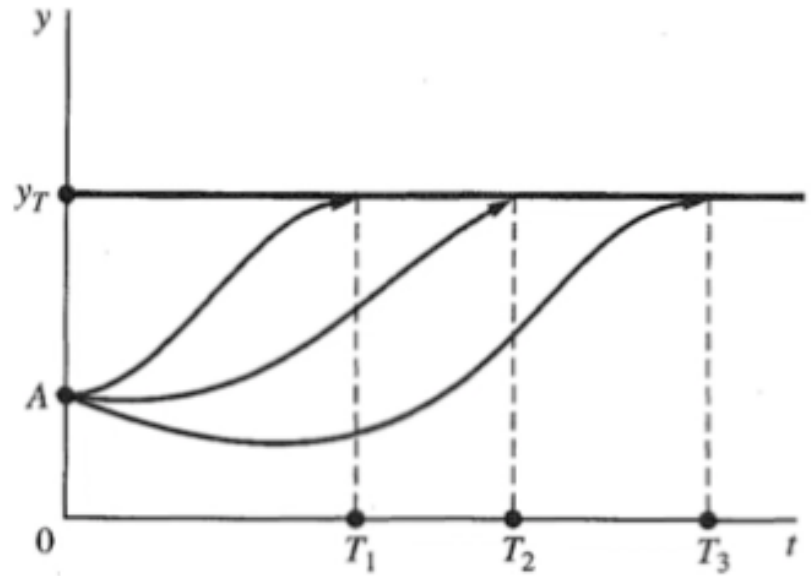


Gráfico 1: *Punto Fijo*

	Condición Terminal	*Condición de Transversalidad*
Punto Fijo	$y(T) = y_T$ *con* T, y_T *dados*	$y(T) = y_T$

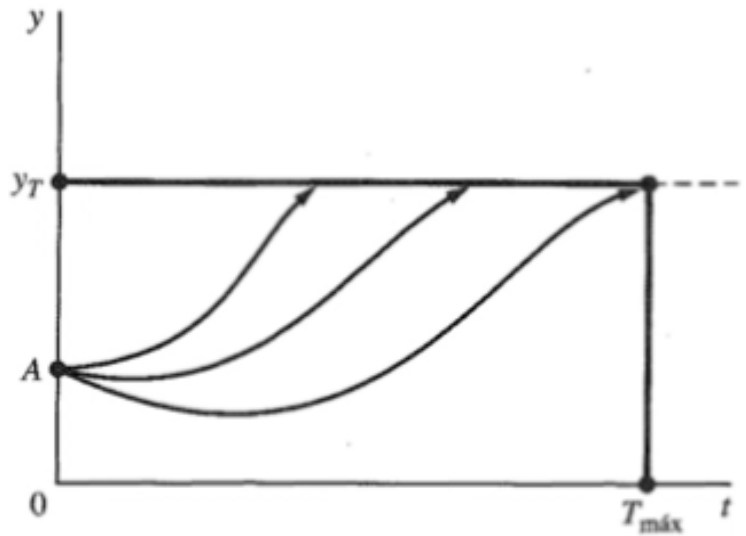
Línea Terminal Horizontal: En este caso, el valor de y_T viene dado, pero se da libertad con respecto al período para alcanzarlo. Es decir, T es libre. La condición aquí es una condición sobre el hamiltoniano: $H_{t=T} = 0$



	Condición Terminal	*Condición de Transversalidad*
Terminal Horizontal	$y(T) = y_T$ *con* T *libre,* y_T *dado*	$H_{t=T} = 0$

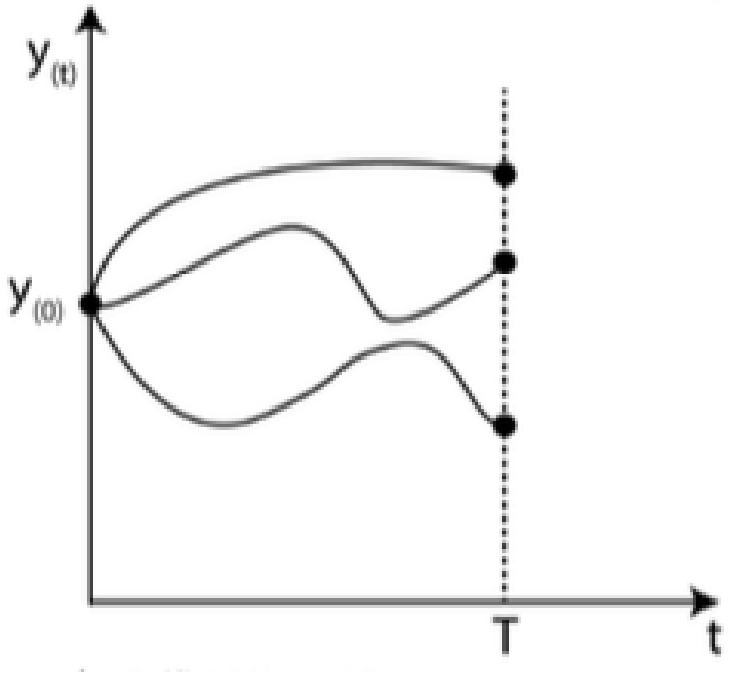
Línea Terminal Horizontal Truncada: aquí, el valor terminal de la variable de estado esta fijado en y_T , pero este puede alcanzarse en cualquier período siempre que $T \leq T_{max}$. La condición de transversalidad es:

$$H_{t=T_{max}} \geq 0, \quad T \leq T_{max}, \quad [T - T_{max}]H_{t=T_{max}} = 0$$



	Condición Terminal	*Condición de Transversalidad*
Horizontal Truncada	y_T *fijo;* T *libre s.a.* $T \leq T_{Máx}$	$H_{t=T_M} \geq 0 ; T \leq T_M ; (T - T_M)H_{t=T_M} = 0$

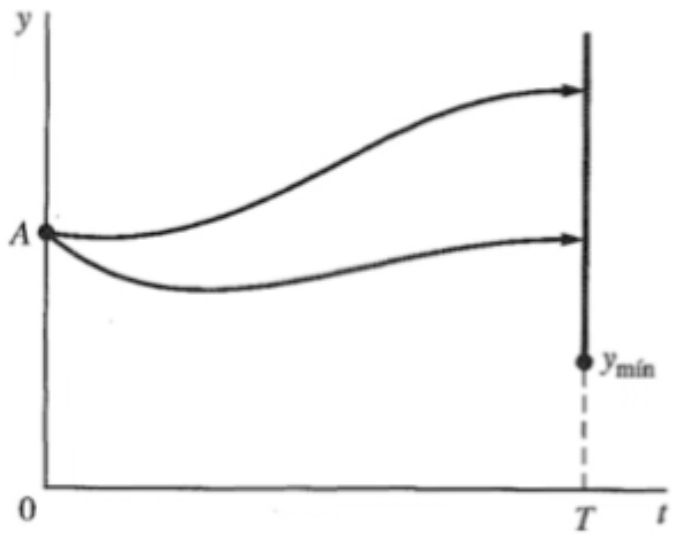
Línea Vertical Terminal: Aquí el valor de T es fijo, pero se dá libertad respecto al valor de $Y(T)$ el cual es libre. Para este caso la condición de transversalidad es $\lambda(T) = 0$



	Condición Terminal	*Condición de Transversalidad*
Terminal Vertical	$y(T) = y_T$ *con* T *fijo,* y_T *libre*	$\lambda(T) = 0$

Línea Vertical Terminal Truncada: en este caso, el último período viene dado por T, pero el valor final de la variable de estado debe cumplir con $y_T \geq y_{min}$. En este caso se plantea una condición de holgura complementaria:

$$\lambda(T) \geq 0, \quad y_T \geq y_{min}, \quad \lambda(T)[y_T - y_{min}] = 0$$



	Condición Terminal	*Condición de Transversalidad*
Vertical Truncada	*T fijo;* y_T *libre s.a.* $y_T \geq y_{min}$	$\lambda(T) \geq 0 ; y_T \geq y_m ; (y_T - y_m)\lambda(T) = 0$

Resumiendo:

Se tiene como dato en el planteo del problema

Corresponde con la condición de transversalidad en un problema con horizonte temporal finito

Corresponde con la condición de transversalidad en un problema con horizonte temporal infinito

	Condición Terminal	*Condición de Transversalidad*	*Condición de Transversalidad*
Punto Fijo	$y(T) = y_T \; con \; T, y_T \; dados$	$y(T) = y_T$	$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_\infty$
Terminal Horizontal	$y(T) = y_T \; con \; T \; libre, y_T \; dado$	$H_{t=T} = 0$	$\lim_{t\to\infty} H = 0$
Terminal Vertical	$y(T) = y_T \; con \; T \; fijo, y_T \; libre$	$\lambda(T) = 0$	$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0 \; ; \lim_{t\to\infty} H = 0$
Curva Terminal	$y(T) = y_T \; con \; T, y_T \; libres$	$\lambda(T) = 0 \; ; \; H_{t=T} = 0$	$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0 \; ; \lim_{t\to\infty} H = 0$
Vertical Truncada	$T \; fijo; \; y_T \; libre \; s.a. \; y_T \geq y_{min}$	$\lambda(T) \geq 0 \; ; y_T \geq y_m \; ; (y_T - y_m)\lambda(T) = 0$	$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) \geq 0 \; ; \; \lim_{t\to\infty} \lambda(t)[y(t) - y_{min}] = 0$
Horizontal Truncada	$y_T \; fijo; \; T \; libre \; s.a. \; T \leq T_{Máx}$	$H_{t=T_M} \geq 0 \; ; T \leq T_M \; ; (T - T_M)H_{t=T_M} = 0$	$\lim_{t\to\infty} H \geq 0 \; ; \; \lim_{t\to\infty} H[t - t_{Máx}] = 0$

Problemas autónomos

Los *problemas autónomos* son aquellos donde la variable t no ingresa de manera directa ni en la función objetivo ni en la ecuación de estado, tal como:

$$max \int_0^T F(y,u) \quad dt \quad s.a. \quad \dot{y} = f(y,u) \qquad\qquad H(y,u,\lambda) = F(y,u) + \lambda f(y,u)$$

Estos problemas son más sencillos en su resolución y permiten el análisis gráfico de estabilidad mediante *diagramas de fase*.

En algunos casos, el tiempo ingresa como parte de un *factor de descuento* e^{-rt}, de manera que la función objetivo es

$$max \int_0^T G(y,u)e^{-rt} \quad dt$$

El factor de descuento e^{-rt} trae a valor presente una expresión dada en tiempo continuo.

Es el análogo para tiempo continuo de realizar, en tiempo discreto:

$$VP = F_0 + \frac{F_1}{1+r} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{F_n}{(1+r)^n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{F_i}{(1+r)^i}$$

Por ende, en tiempo continuo es:

$$VP = \int_0^n \frac{F}{e^{rt}} dt$$

Estos problemas con factor de descuento no son problemas autónomos, pero pueden ser fácilmente transformados en uno mediante la utilización del *Hamiltoniano en valor corriente.*

Este es idéntico al Hamiltoniano común, solamente que se lo multiplica por e^{rt}

$$H_c \equiv He^{rt} = G(y,u) + \mu f(y,u)$$

donde

$$\mu \equiv \lambda e^{rt}$$

Por ende, se resuelve el problema en valor presente, y se elimina la variable t de la función objetivo.

$$(i) \quad H_c(y,u^*,\mu) \geq H_c(y,u,\mu)$$

$$(ii) \quad \frac{\partial H_c}{\partial \mu} = \dot{y}$$

$$(iii) \quad \dot{\mu} = r\mu - \frac{\partial H_c}{\partial y}$$

$$(iv) \quad \mu(T) = 0 \quad si \quad y(T) \quad libre$$

Se puede plantear el problema de ambas formas, para transformarlo a valor corriente se multiplica todos los términos de la función Hamiltoniana por e^{rt}

$$H(t, y, u, \lambda) \equiv F(t, y, u) + \lambda(t) f(t, y, u)$$

condiciones del principio de máximo de Pontryagin (CPMP)

$$(i) \quad H(t, y, u^*, \lambda) \geq H(t, y, u, \lambda) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$(ii) \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (ec\,.\,estado)$$

$$(iii) \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (ec\,.\,co-estado)$$

$$(iv) \quad \lambda(T) = 0 \quad (cond\,.\,transversalidad)$$

$$H_c \equiv He^{rt} = G(y, u) + \mu f(y, u)$$

donde

$$\mu \equiv \lambda e^{rt}$$

$$(i) \quad H_c(y, u^*, \mu) \geq H_c(y, u, \mu)$$

$$(ii) \quad \frac{\partial H_c}{\partial \mu} = \dot{y}$$

$$(iii) \quad \dot{\mu} = r\mu - \frac{\partial H_c}{\partial y}$$

$$(iv) \quad \mu(T) = 0 \quad si \quad y(T) \quad libre$$

- **1.- Condiciones de Suficiencia de Mangasarian**

Dado el problema de optimización, las CPMP serán también suficientes si:

i. Las funciones F y f son diferenciables y cóncavas en las variables de control y estado

ii. En el máximo, la función f es no lineal en la variable de estado o la de control, con la variable $\lambda(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,T]$

- **2.- Condiciones de Suficiencia de Arrow**

Dado el problema de optimización, si el par $(u^*(t), y^*(t))$ un punto que satisface las CPMP, donde se cumple también que:

$$\hat{H}(t, u^*(t), y^*(t), \lambda^*(t)) \quad concavo \quad \forall y(t), t \in [0,T]$$

Entonces las CPMP adquieren también el carácter de suficientes, y el par mencionado resuelve el problema.

Pasos de resolución :

Paso 1- Evaluar el planteo del problema.

Paso 2- Armar la función Hamiltoniana.

Paso 3- (opcional) – Transformar la función Hamiltoniana a valor presente.

Paso 4- Deducir las condiciones de primer orden del Principio de Maximo de Pontryagin.

Paso 5- Hallar la ecuación de Euler a partir de la condición (1) y (3) que proporciona la trayectoria óptima de la variable de control.

Paso 6- Armar un sistema compuesto por : ec. de Euler (información sobe v. control) y ec del Movimiento (información sobre la variable de estado)

Paso 7- Arma un diagrama de fases, estableciendo las curvas de demarcación a partir de "$\dot{c} = 0\,, \dot{y} = 0$".

Paso 8- Evaluar los signos de las derivadas $\frac{\partial \dot{c}}{\partial y}$ o $\frac{\partial \dot{c}}{\partial c}$ y $\frac{\partial \dot{y}}{\partial c}$ o $\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}$ (a partir del sistema obtenido en el paso 6) para establecer el análisis cualitativo.

Paso 9- Verificar condiciones de suficiencia.

Ejemplo 1:

Maximización de la utilidad del consumo de un recurso pesquero

$$\text{Maximizar} \quad V = \int_0^{\infty} U(C)e^{-rt}dt$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \frac{dK}{dt} = g(K) - C$$

$$\textit{condición inicial:} \quad K(0) = K_0$$

v.control:C
v.estado:K

Supuestos:
$U'(C) > 0 \ \wedge U''(C) < 0$

El consumidor es impaciente . El crecimiento del recurso depende del stock.

K: Stock de capital

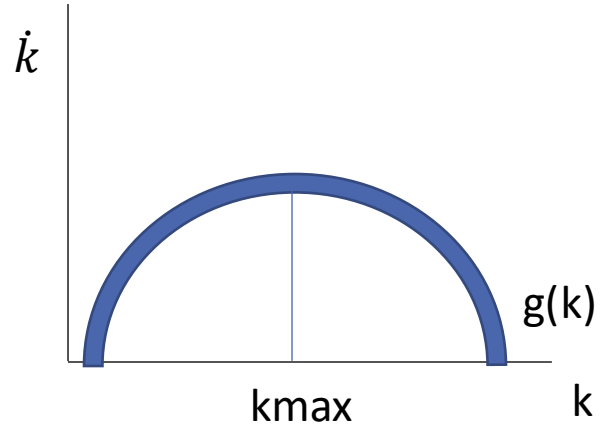
g(k): Función de crecimiento biológico del recurso

g'(k)>0 $\forall k < kmax \ \wedge g'(k) < 0 \ \forall k > kmax$

Paso 1- Evaluar el planteo del problema.

El objetivo es controlar el consumo del recurso natural para maximizar la función de bienestar

Se asume la convergencia de la integral impropia



Paso 2- Armar la función Hamiltoniana.

$$H(c, k, \lambda, t) = U(C)e^{-rt} + \lambda[g(K) - C]$$

Paso 3- (opcional) – Transformar la función Hamiltoniana a valor presente.

$$H_{VP}(c, k, \mu) = U(C) + \mu[g(K) - C]$$

Paso 4- Deducir las condiciones de primer orden del Principio de Maximo de Pontryagin.

despejamos

derivamos

1) $\frac{\partial H_{VP}}{\partial C} = 0 \rightarrow \quad U'(C) - \mu = 0$ $\rightarrow$ $\mu = U'(c)$ $\rightarrow$ $\dot{\mu} = U''(c)\dot{c}$

$\frac{\partial^2 H_{VP}}{\partial C^2} < 0$

2) $\frac{\partial H}{\partial \mu} = \frac{dK}{dt} \rightarrow g(k) - C = \frac{dK}{dt}$

3) $-\frac{\partial H}{\partial K} + r\mu = \frac{d\mu}{dt} \rightarrow -\mu g'(K) + r\mu = \frac{d\mu}{dt}$ $\rightarrow$ $\dot{\mu} + \mu(g'(k) - r) = o$

4) *Condición de transversalidad* $\lim_{t \to +\infty} \mu(t) = 0$

Paso 5- Hallar la ecuación de Euler a partir de la condición (1) y (3) que proporciona la trayectoria óptima de la variable de control.

Paso 6- Armar un sistema compuesto por : ec. de Euler (información sobe v. control) y ec del Movimiento (información sobre la variable de estado)

$$U''(c)\dot{c} + U'(c)(g'(k) - r) = o$$

Despejamos para encontrar ec.Euler

$$\dot{C} = -\frac{U'(c)}{U''(c)}(g'(k) - r). \quad \textit{Ecuación de Euler}$$

$$\dot{k} = g'(k) - C \quad \textit{Ecuación del movimiento}$$

Paso 7- Arma un diagrama de fases, estableciendo las curvas de demarcación a partir de "$\dot{c} = 0\,, \dot{y} = 0$".

Buscamos las curvas de demarcación $\dot{C} = 0.\,, \wedge \;\; \dot{k} = 0$

$DE \;:\; \dot{C} = 0 \Rightarrow g'(k) = r$

Stock constante "crecimiento equilibrado"

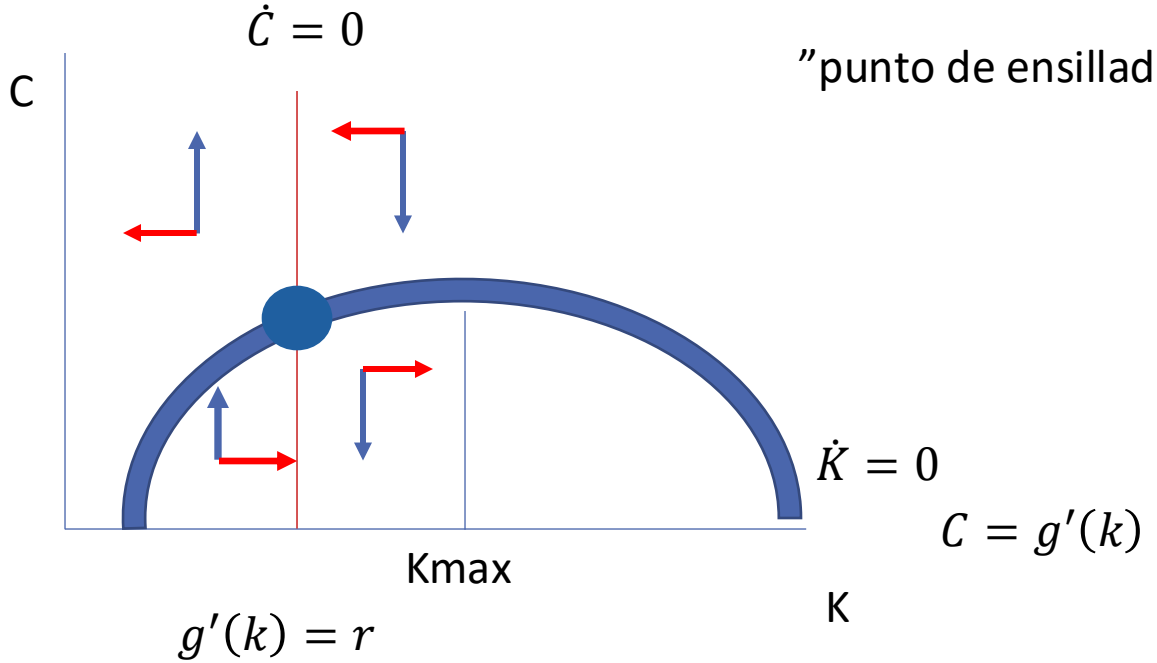
$DE \;:\; \dot{K} = 0 \Rightarrow C = g'(k)$

Equilibrio en decisiones de consumo

Paso 8- Evaluar los signos de las derivadas $\frac{\partial \dot{c}}{\partial k}$ o $\frac{\partial \dot{c}}{\partial c}$ y $\frac{\partial \dot{k}}{\partial c}$ o $\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}$ (a partir del sistema obtenido en el paso 6) para establecer el análisis cualitativo.

$DE: \dot{C} = 0 \qquad g'(k) = r$

$DE: \dot{K} = 0 \qquad C = g'(k)$



$$\frac{\dot{C}}{K} = -\frac{U'(c)}{U''(c)} g''(k) < 0$$

$$\frac{\dot{K}}{C} = -1 < 0$$

La curva de crecimiento biológico iguala a la tasa de impaciencia
Y esta se supone positiva por lo cual debe estar a la izquierda del Kmax donde g'(k)>0

Paso 9- Verificar condiciones de suficiencia.

Si se cumplen ,se puede asegurar que C*(t),k*(t),$\mu\ *(t), maximizan\ a\ la\ función\ objetivo$

F cóncava en (c,k)
f cóncava en(c,k)
$\mu > 0\ si\ f\ es\ no\ lineal$

1) $U(C)e^{-rt}$ es cóncava en (K, C)
2) $g(K) - C$ es cóncava en (K, C)
3) $\mu > 0$

Debido a que la solución presenta un punto silla ,la única forma de que se verifique la condición de Transversalidad es que la trayectoria óptima sea la que se dirige al punto de equilibrio

Ejemplo 2 :

$$\max \int_0^{\infty} u(c(t))e^{-\rho t} \quad s.a. \quad \begin{cases} \dot{k} = f(k) - c - (n+\delta)k \\ k(0) = k_0, \quad \lim_{t\to\infty} k(t)e^{-(r-n)t} \geq 0 \\ c(t) \in [0, f(k)] \end{cases}$$

La evolución temporal del stock de capital o la *inversión*, es una función del stock de capital y del consumo, dado que se asocia al ahorro

Paso 1- Evaluar el planteo del problema.

Se tiene un consumidor representativo a quien le interesa maximizar su utilidad durante un período de tiempo desde t = 0 y $t = T$. Para ello, tiene la decisión en cada período sobre la cantidad de ingreso que destina al consumo, $c(t)$. La parte que no se consume en cada período se destina a la formación capital físico, aumentando el stock $k(t)$.

La función de utilidad del consumidor depende exclusivamente de su consumo y es una función cóncava

$$U(c(t)), U' > 0, U'' < 0$$

El agente cuenta con una dotación inicial de capital, $k(0) = k_0$. y en el largo plazo no se establece un valor fijo, por lo cual se deja libre.

El consumo es la variable de control, y el capital es la de estado. La función a maximizar es la utilidad. ρ es la tasa de descuento subjetiva, δ la depreciación del capital, n es la tasa de crecimiento poblacional y la función de producción per cápita es f(k).

Paso 2- Armar la función Hamiltoniana.

$$H(c,k,t,\lambda) = u\big(c(t)\big)e^{-\rho t} + \lambda[f(k) - c - (n+\delta)k]$$

Paso 3- (opcional) – Transformar la función Hamiltoniana a valor presente.

$$H(c,k,t,\lambda)e^{\rho t} = u\big(c(t)\big)e^{-\rho t}e^{\rho t} + \lambda e^{\rho t}[f(k) - c - (n+\delta)k]$$

$$H_c(c,k,\mu) = u(c(t)) + \mu\left[f(k) - c - (n+\delta)k\right], \quad \mu \equiv \lambda e^{\rho t}$$

Paso 4- Deducir las condiciones de primer orden del Principio de Maximo de Pontryagin.

$$(i) \quad \frac{\partial H_c}{\partial c(t)} = u'(c(t)) - \mu = 0$$

$$(ii) \quad \frac{\partial H_c}{\partial \mu(t)} = \dot{k} = f(k) - c - (n+\delta)k$$

$$(iii) \quad \dot{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial H_c}{\partial k} \Longrightarrow \dot{\mu} = \rho\mu - \left[f'(k) - (n+\delta)\right]\mu$$

$$(iv) \quad \lim_{t\to\infty} \mu(t) = 0$$

CPMP

$$(i)\quad \frac{\partial H_c}{\partial c(t)} = u'(c(t)) - \mu = 0$$

despejamos

$$\mu = u'(c(t))$$

derivamos

$$\dot{\mu} = u''(c(t))\dot{c}$$

$$(ii)\quad \frac{\partial H_c}{\partial \mu(t)} = \dot{k} = f(k) - c - (n+\delta)k$$

$$(iii)\quad \dot{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial H_c}{\partial k} \Longrightarrow \dot{\mu} = \rho\mu - \left[f'(k) - (n+\delta)\right]\mu$$

reordenamos

$$\dot{\mu} + \mu\left[f'(k) - (n+\delta+\rho)\right] = 0 \qquad (A)$$

$$(iv)\quad \lim_{t\to\infty} \mu(t) = 0$$

$$u''(c(t))\dot{c} + u'(c(t))\left[f'(k) - (n+\delta+\rho)\right] = 0 \qquad (B)$$

Paso 5- Hallar la ecuación de Euler a partir de la condición (1) y (3) que proporciona la trayectoria óptima de la variable de control.

$$u''(c(t))\dot{c} + u'(c(t))\left[f'(k) - (n + \delta + \rho)\right] = 0 \qquad (B)$$

despejamos $\dot{c}$

$$\dot{c} = -\frac{u'(c(t))}{u''(c(t))}[f'(k) - (n + \delta + \rho)] \qquad Euler$$

- Esta ecuación da el sendero temporal óptimo para el consumo del hogar; otorga el control óptimo. Es decir, determina el valor del consumo para cada período que maximiza la utilidad de toda la vida del hogar.

Paso 6- Armar un sistema compuesto por : ec. de Euler (información sobe v. control) y ec del Movimiento (información sobre la variable de estado)

$$\begin{cases} \dot{c} = -\dfrac{u'(c(t))}{u''(c(t))}[f'(k) - (n + \delta + \rho)] \\ \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n + \delta)k \end{cases}$$

...información sobre variable de control

...información sobre variable de estado

Paso 7- Arma un diagrama de fases, estableciendo las curvas de demarcación a partir de "$\dot{c} = 0$, $\dot{k} = 0$".

$$\begin{cases} \dot{c} = -\dfrac{u'(c(t))}{u''(c(t))}[f'(k) - (n + \delta + \rho)] \\ \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n + \delta)k \end{cases}$$

Busco las curvas de demarcación

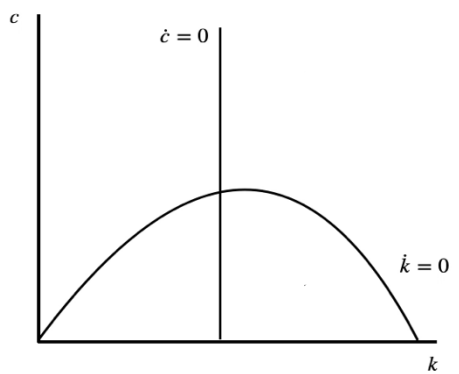
$\dot{c} = 0$, y $\dot{k} = 0$

Para este modelo, $\dot{c} = 0$ indica que hay equilibrio en las decisiones de los hogares, es decir, no tienen incentivos a modificar su comportamiento.

$\dot{k} = 0$, por otro lado, indica que el stock de capital per capita es constante, por lo que la economía se encuentra en un crecimiento equilibrado.

La intersección de $\dot{k} = 0$ y $\dot{c} = 0$ da el **equilibrio de este modelo.**

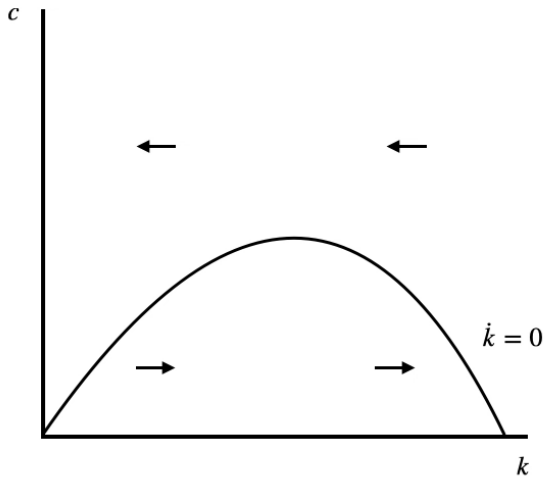
$$\begin{cases} \dot{c} = 0 \Rightarrow f'(k) = (n + \delta + \rho) \\ \dot{k}(t) = 0 \Rightarrow c(t) = f(k(t)) - (n + \delta)k \end{cases}$$



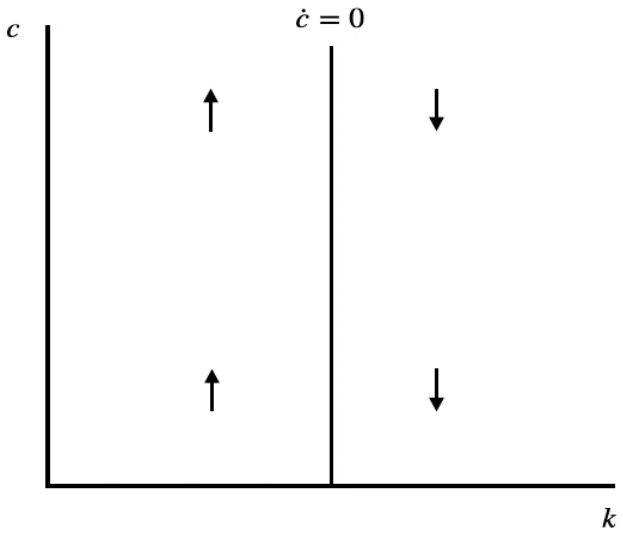
Paso 8- Evaluar los signos de las derivadas $\frac{\partial \dot{c}}{\partial k}$ o $\frac{\partial \dot{c}}{\partial c}$ y $\frac{\partial \dot{k}}{\partial c}$ o $\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}$ (a partir del sistema obtenido en el paso 6) para establecer el análisis cualitativo.

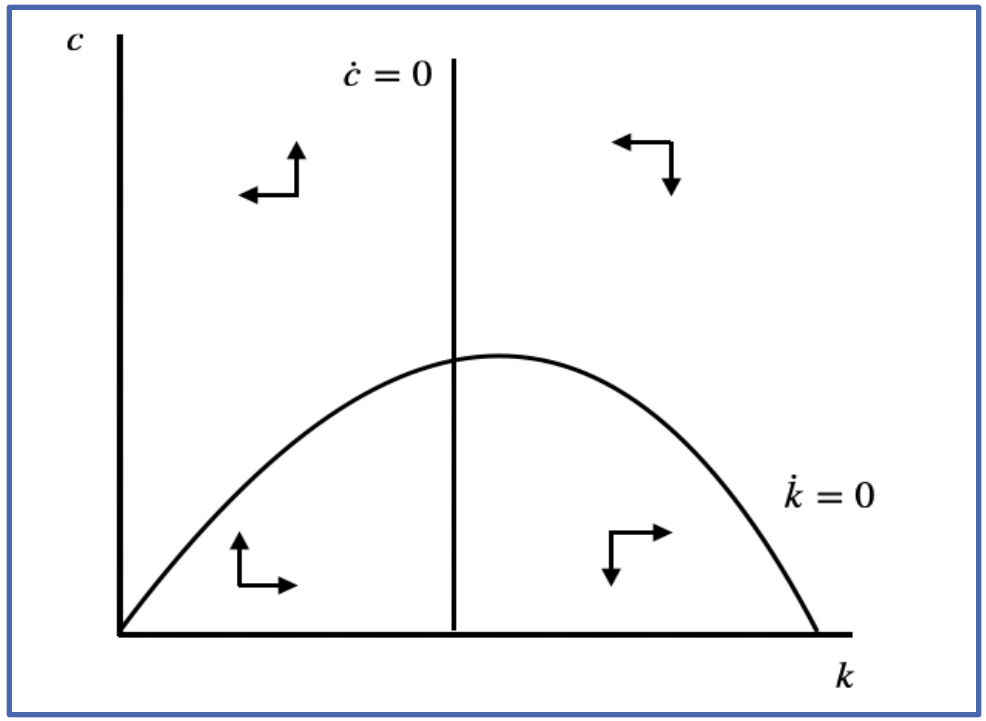
$$\begin{cases} \dot{c} = -\dfrac{u'(c(t))}{u''(c(t))}[f'(k) - (n + \delta + \rho)] \\ \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n + \delta)k \end{cases}$$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = -1 < 0$$



$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} = -\frac{u'(c)}{u''(c)} f''(k) < 0$$





Paso 9- Verificar condiciones de suficiencia.

- **1.- Condiciones de Suficiencia de Mangasarian**

Dado el problema de optimización, las CPMP serán también suficientes si:

i. Las funciones F y f son diferenciables y cóncavas en las variables de control y estado

ii. En el máximo, la función f es no lineal en la variable de estado o la de control, con la variable $\lambda(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,T]$

Se cumplen para el problema dado

Ejemplo 3:

$$\max_{c(t)} \int_0^T c^{\alpha} e^{-\delta t} dt \qquad s.a. \qquad k' = (r-\theta)k - c$$

$$con \qquad k(0) = 0; \;\; k(T) = A \qquad\qquad 0 < \alpha < 1$$

Paso 1- Evaluar el planteo del problema.

El consumo es la variable de control, y el capital k es la de estado. La función por maximizar es la utilidad del consumo donde el mismo es afectado por un exponente paramétrico que varía entre cero y uno.
δ es la tasa de descuento subjetiva. Notar que la condición de transversalidad será un punto fijo pues k(0) y k(T) son fijas.

Paso 2- Armar la función Hamiltoniana.

$$H(c, k, t, \lambda) = c^{\alpha} e^{-\delta t} + \lambda((r-\theta)k - c)$$

Paso 3- (opcional) – Transformar la función Hamiltoniana a valor presente.

$$H_c(t, c, k, \mu) = c^{\alpha} + \mu[(r - \theta)k - c]$$

Paso 4- Deducir las condiciones de primer orden del Principio de Maximo de Pontryagin.

(1) $$\frac{\partial H_c}{\partial c_t} = \alpha c^{\alpha-1} - \mu = 0$$

(2) $$\frac{\partial H_c}{\partial \mu} = \dot{k} = (r - \theta)k - c$$

(3) $$\dot{\mu} = -\frac{\partial H_c}{\partial k_t} + \delta\mu = -\mu\,(r - \theta) + \delta\mu$$

(4) $$K(T) = K_T$$

En primer lugar, despejamos μ de (1):

$$\mu = \alpha c^{\alpha-1} \tag{5}$$

Derivando (5) respecto de t obtenemos:

$$\dot{\mu} = \alpha(\alpha-1)c^{\alpha-2}\dot{c} \tag{6}$$

Por otra parte, de (3) tenemos una expresión para $\dot{\mu}$:

$$\dot{\mu} = \mu\,(\theta - r + \delta) \tag{7}$$

Reemplazando (5) en (7)

$$\dot{\mu} = \alpha c^{\alpha-1}\,(\theta - r + \delta) \tag{8}$$

Finalmente, igualamos (6) y (8)

$$\alpha(\alpha-1)c^{\alpha-2}\dot{c} = \alpha c^{\alpha-1}\,(\theta - r + \delta) \tag{9}$$

De la expresión (9) despejamos la Ecuación de Euler:

$$\dot{c} = c\left(\frac{\theta - r + \delta}{\alpha - 1}\right)$$

Paso 5- Hallar la ecuación de Euler a partir de la condición (1) y (3) que proporciona la trayectoria óptima de la variable de control.

Hallar el control óptimo

Para hallar el control óptimo, resta con resolver la ecuación diferencial $\dot{c}$. La raíz de dicha ecuación es la siguiente:

$$r = \left(\frac{\theta - r + \delta}{\alpha - 1}\right)$$

Por lo tanto,

$$C_G(t) = C_1 e^{\left(\frac{\theta - r + \delta}{\alpha - 1}\right)t}$$

Establecer una relación entre las tasas r, δ y θ para que la dinámica sea estable

Para que la solución hallada sea estable necesitamos que la raíz de la ecuación $\dot{c}$ sea negativa:

$$r = (\theta - r + \delta)\underbrace{\frac{1}{\alpha - 1}}_{<0}$$

Entonces, para que $r < 0$

$$\theta - r + \delta > 0 \qquad \longrightarrow \qquad \delta > r - \theta$$

Paso 6- Armar un sistema compuesto por : ec. de Euler (información sobe v. control) y ec del Movimiento (información sobre la variable de estado)

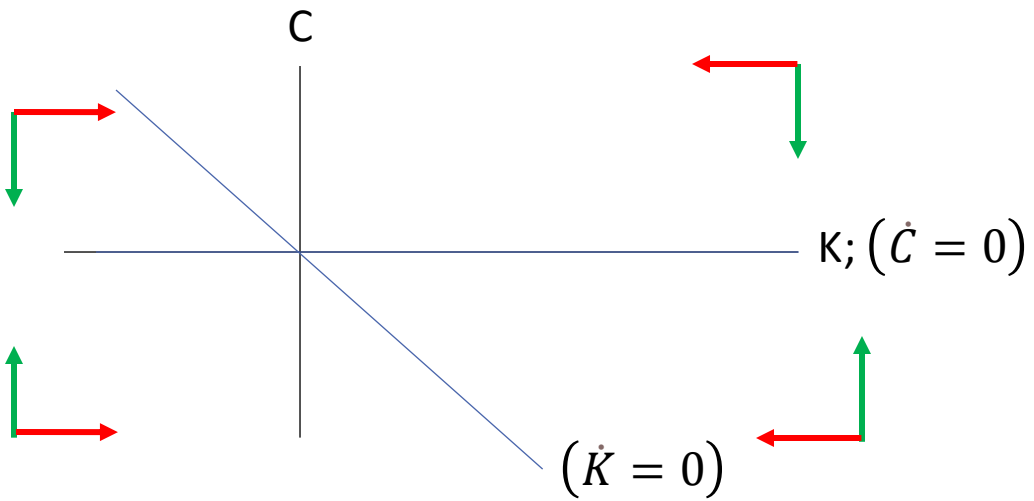
$$\begin{cases} \dot{c} = c\left(\dfrac{\theta - r + \delta}{\alpha - 1}\right) \\ k' = (r - \theta)k - c \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (\dot{C} = 0) \\ (\dot{K} = 0) \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ C = \left(\underbrace{r - \theta}_{\theta > r}\right)k \end{cases}$$

Paso 7- Arma un diagrama de fases, estableciendo las curvas de demarcación a partir de "$\dot{c} = 0\,, \dot{k} = 0$".

Paso 8- Evaluar los signos de las derivadas $\frac{\partial \dot{c}}{\partial k}$ o $\frac{\partial \dot{c}}{\partial c}$ y $\frac{\partial \dot{k}}{\partial c}$ o $\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}$ (a partir del sistema obtenido en el paso 6) para establecer el análisis cualitativo.

$$\frac{\partial \dot{C}}{\partial C} = \frac{\theta - r + \delta}{\alpha - 1} < 0$$

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial C} = (r - \theta) < 0$$



Paso 9- Verificar condiciones de suficiencia.

- **1.- Condiciones de Suficiencia de Mangasarian**

Dado el problema de optimización, las CPMP serán también suficientes si:

i. Las funciones F y f son diferenciables y cóncavas en las variables de control y estado

ii. En el máximo, la función f es no lineal en la variable de estado o la de control, con la variable $\lambda(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,T]$

Se cumplen para el problema dado

.UBA económicas
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

Control Óptimo Continuo – parte 2

Material complementario

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

Chiang, A., Elements Of Dynamic Optimization, parte 3

Prof.: Rita Beatriz Morrone

Planteo del problema (repaso)

v.control

$$max \int_0^T F(t, y, u) \quad dt \quad s.a. \quad \dot{y} = f(t, y, u)$$

v.de estado

$$y(0) = y_0, \quad y(T) \quad libre$$

$$u(t) \in U \quad \forall t \in [0,T]$$

Función objetivo : Se busca obtener $(u_i^*; y_i^*) \forall i \{0 \ldots . T\}$ durante un horizonte temporal
De t=0 a t=T

Ecuación del movimiento: Indica como u(t) traduce un patrón de movimiento para y(t)

Valor inicial y final de la variable de estado

Dominio de la variable de control

Dado un el intervalo de tiempo → (finito $[O, T]$, o infinito $[0, \infty]$),

Objetivo principal: → determinar las trayectorias temporales de las variables $de \quad control\, u(t)$ y $de\ estado\ y(t)$ que optimicen la función objetivo.

Se busca el valor óptimo de una variable de elección en cada momento del período, (detallando el mejor valor de la variable hoy, mañana, y así sucesivamente, hasta el final del período de planificación).

$$H(t, y, u, \lambda) \equiv F(t, y, u) + \lambda(t) f(t, y, u)$$

condiciones del principio de máximo de Pontryagin (CPMP)

(i) $H(t, y, u^*, \lambda) \geq H(t, y, u, \lambda) \quad \forall t \in [0, T]$

(ii) $\dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (ec.\,estado)$

(iii) $\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial y} \quad (ec.\,co-estado)$

(iv) $\lambda(T) = 0 \quad (cond.\,transversalidad)$

$$H_c \equiv He^{rt} = G(y, u) + \mu f(y, u)$$

donde

$$\mu \equiv \lambda e^{rt}$$

(i) $H_c(y, u^*, \mu) \geq H_c(y, u, \mu)$

(ii) $\dfrac{\partial H_c}{\partial \mu} = \dot{y}$

(iii) $\dot{\mu} = r\mu - \dfrac{\partial H_c}{\partial y}$

(iv) $\mu(T) = 0 \quad si \quad y(T) \quad libre$

- **1.- Condiciones de Suficiencia de Mangasarian**

Dado el problema de optimización, las CPMP serán también suficientes si:

i. Las funciones F y f son diferenciables y cóncavas en las variables de control y estado

ii. En el máximo, la función f es no lineal en la variable de estado o la de control, con la variable $\lambda(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,T]$

- **2.- Condiciones de Suficiencia de Arrow**

Dado el problema de optimización, si el par $(u^*(t), y^*(t))$ un punto que satisface las CPMP, donde se cumple también que:

$$\hat{H}(t, u^*(t), y^*(t), \lambda^*(t)) \quad concavo \quad \forall y(t), t \in [0,T]$$

Entonces las CPMP adquieren también el carácter de suficientes, y el par mencionado resuelve el problema.

Pasos para la resolución:

- 1- se plantea el problema.
- 2- se confecciona el Hamiltoniano.
- 3- (opcional) – Se expresa el Hamiltoniano a valor presente.
- 4- se deducen las condiciones de primer orden del Principio de Maximo de Pontryagin.
- 5- a partir de la condición (1) y (3) se obtiene la ecuación de Euler que proporciona la trayectoria óptima de la variable de control.
- 6- se arma un sistema compuesto por : ec. de Euler (información sobe v. control) y ec del Movimiento (información sobre la variable de estado)
- 7- se arma un diagrama de fases, estableciendo las curvas de demarcación a partir de "$\dot{c} = 0\ , \dot{y} = 0$".
- 8- se realizan las derivadas $\frac{\partial \dot{c}}{\partial y}$ y $\frac{\partial \dot{y}}{\partial c}$ (a partir del sistema obtenido en el paso 6) para establecer el análisis cualitativo.
- 9- se verifican condiciones de suficiencia.

Ejemplo 1– Hallar el control óptimo

$$\max c(t) \int_0^T \ln(c_t) e^{-dt}\ dt \quad sa.\ \dot{k} = rk - c$$

$$con\ \ k(0) = 0\ \ y\ \ k(T) = k_T$$

$$H(c, k, t, \lambda) \equiv \ln(c_t)\, e^{-dt} + \lambda[rk - c]$$

$$1)\ \frac{\partial H}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} e^{-dt} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{c_t} e^{-dt} \Rightarrow \dot{\lambda} = \frac{-de^{-dt}.c_t - e^{-dt}.\dot{c}}{c_t^2} = \frac{-e^{-dt}(d.c_t + \dot{c})}{c_t^2}$$

$$2)\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} = rk - c = \dot{k}$$

$$3)\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial k} \Rightarrow \dot{\lambda} = -\lambda r \Rightarrow \frac{-e^{-dt}(d.c_t + \dot{c})}{c_t^2} = -r \frac{1}{c_t} e^{-dt}$$

$$d.c_t + \dot{c} = r.c_t$$

$$\dot{c} = r.c_t - d.c_t$$

Ec.Euler

$$\dot{c} = (r - d)c_t$$

$$4)\ k(T) = k_T$$

Control óptimo $\Rightarrow C_t = C_1 e^{(r-d)t}$

Mismo ejemplo como problema autónomo

$$\max c(t) \int_0^T \ln(c_t) e^{-dt}\ dt \quad sa.\ \dot{k} = rk - c$$

$$con\ \ k(0) = 0\ \ y\ \ k(T) = k_T$$

$$H_{vp}(c, k, \mu) \equiv \ln(c_t) + \mu[rk - c]$$

1) $\dfrac{\partial Hvp}{\partial c_t} = \dfrac{1}{c_t} - \mu = 0$ ⇒ $\mu = \dfrac{1}{c_t}$ ⇒ $\dot{\mu} = -\dfrac{\dot{c}}{c_t^2}$

2) $\dfrac{\partial Hvp}{\partial \mu} = rk - c = \dot{k}$

3) $\dot{\mu} = -\dfrac{\partial Hvp}{\partial k} + d\mu$ ⇒ $\dot{\mu} = -\mu r + d\mu$ ⇒ $\dot{\mu} = -\mu(r - d)$

4) $k(T) = k_T$

Ec.Euler

$$\dot{c} = (r - d)c_t$$

$$-\frac{\dot{c}}{c_t^2} = -\frac{1}{c_t}\ (r - d) \Rightarrow C_t = C_1 e^{(r-d)t}$$

Control óptimo

Ejemplo 2

$$\max \int_0^{\infty} \ln(c_t)e^{-\delta t}dt \text{ s.a. } \dot{k} = \phi(k_t) - c_t - \frac{k_t}{2};\ k(0) = 0;\ \varphi(k_t) = (1 - e^{-kt})$$

a. Escribir el hamiltoniano asociado al problema de maximizacion dado
Como primer paso, se expresa el Hamiltoniano:

$$H(t, c, k, \lambda) = ln(c_t)e^{-\delta t} + \lambda \left[1 - e^{-k_t} - c_t - \frac{k_t}{2}\right]$$

Expresándolo como Hamiltoniano en valor presente, dado:

$$\mu = \lambda e^{\delta t}$$

Y multiplicando ambos términos por $e^{\delta t}$:

$$H_{vp}(c, k, \mu) = ln(c_t)e^{-\delta t}e^{\delta t} + \lambda e^{\delta t} \left[1 - e^{-k_t} - c_t - \frac{k_t}{2}\right]$$

Se obtiene:

$$H_{vp}(c, k, \mu) = \ln(c_t) + \mu \left[1 - e^{-k_t} - c_t - \frac{k_t}{2}\right]$$

$$H_{vp}(c,k,\mu) = \ln(c_t) + \mu\left[1 - e^{-k_t} - c_t - \frac{k_t}{2}\right]$$

CPMP

$$1)\frac{\partial H_{vp}}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \mu = 0$$

$$2)\dot{k} = 1 - e^{-k_t} - c_t - \frac{k_t}{2}$$

$$3)\dot{\mu} = -\frac{\partial H_{vp}}{\partial k_t} + \delta\mu = -\mu\left(e^{-k_t} - \frac{1}{2}\right) + \delta\mu$$

$$4)\lim_{t\to\infty}\mu(t) = 0$$

Luego, se despeja μ de la primer condición, obteniendo:

$$\mu = \frac{1}{c_t}$$

Se deriva, para obtener $\dot{\mu}$:

$$\dot{\mu} = \frac{-1}{c_t^2}\dot{c}$$

posteriormente, se sustituye en la tercer condición las expresiones halladas para μ y $\dot{\mu}$:

$$\frac{-\dot{c}}{c_t^2} = \frac{1}{c_t}\left(\delta - e^{-k_t} + \frac{1}{2}\right)$$

despejando $\dot{c}$ se obtiene la ecuación de Euler:

$$\dot{c} = c\left(e^{-k_t} - \tfrac{1}{2} - \delta\right)$$

$$\begin{cases} \dot{c} = c\left(e^{-k_t} - \frac{1}{2} - \delta\right) \\ \dot{k} = 1 - e^{-k_t} - c_t - \frac{k_t}{2} \end{cases}$$

Y considerando $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$, se obtiene:

$$\begin{cases} 0 = c\left(e^{-k_t} - \frac{1}{2} - \delta\right) \\ 0 = 1 - e^{-k_t} - c_t - \frac{k_t}{2} \end{cases}$$

despejando ambas expresiones, de la siguiente manera:
De $\dot{c} = 0$:

$$0 = c\left(e^{-k_t} - \frac{1}{2} - \delta\right)$$

$$0 = \left(e^{-k_t} - \frac{1}{2} - \delta\right)$$

$$e^{-k_t} = \frac{1}{2} + \delta$$

$$ln(e^{-k_t}) = ln(\frac{1}{2} + \delta)$$

$$-k_t = ln(\frac{1}{2} + \delta)$$

$$k_t = -ln(\frac{1}{2} + \delta)$$

De $\dot{k} = 0$:

$$0 = 1 - e^{-k_t} - c_t - \frac{k_t}{2}$$

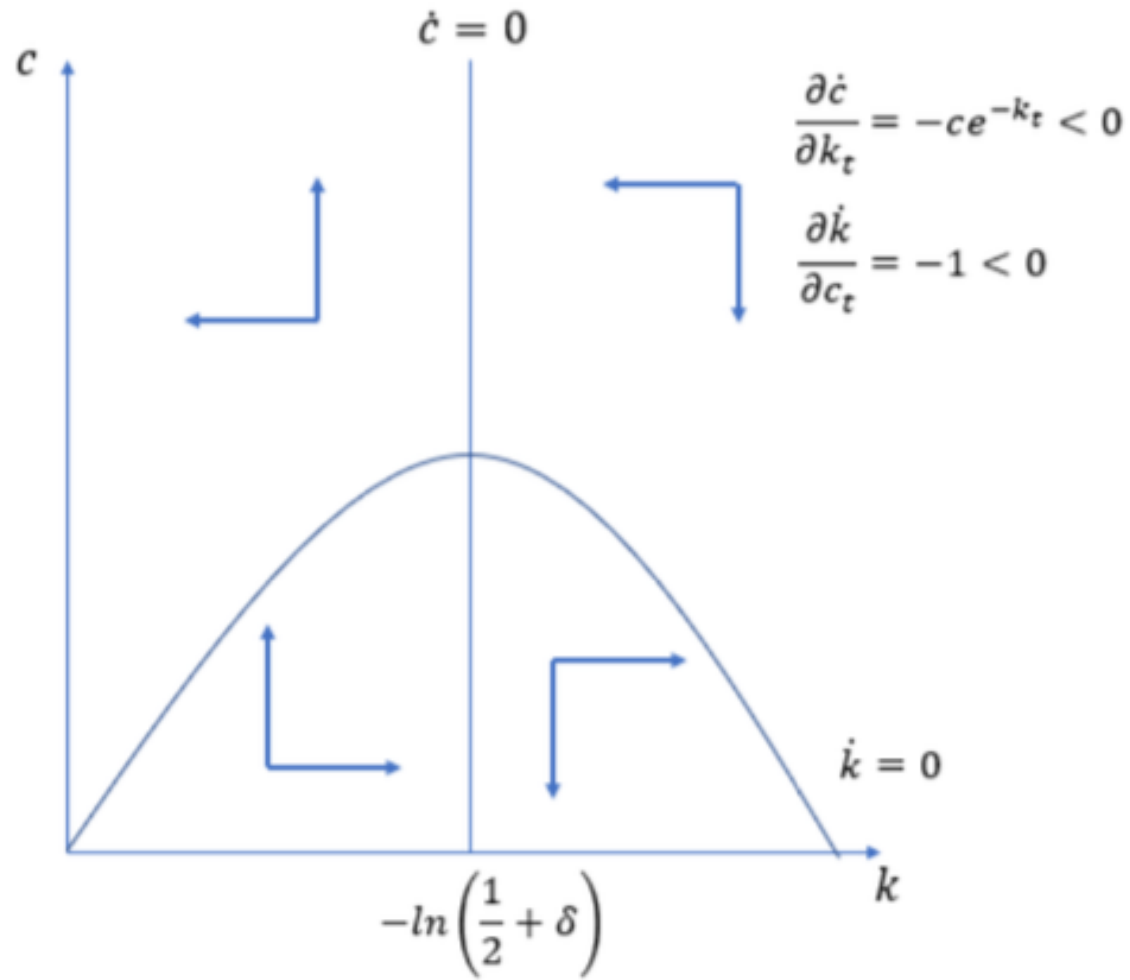
$$c_t = 1 - e^{-k_t} - \frac{k_t}{2}$$

Se obtienen las curvas de demarcación:

$$\begin{cases} \dot{k} = 0 & c_t = 1 - e^{-k_t} - \frac{k_t}{2} \\ \dot{c} = 0 & k_t = -\ln\left(\frac{1}{2} + \delta\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{c} = c\left(e^{-k_t} - \frac{1}{2} - \delta\right) \\ \dot{k} = 1 - e^{-k_t} - c_t - \frac{k_t}{2} \end{cases}$$

se obtiene el signo de las derivadas $\frac{\partial \dot{k}}{\partial c}$ y $\frac{\partial \dot{c}}{\partial k}$ para construir el diagrama de fases de la siguiente manera:



Modelo de conflicto dinámico entre capitalistas y trabajadores

- Se observa un conflicto dinámico entre capitalistas y trabajadores .
- Ambos quieren lograr el máximo nivel de consumo posible en el futuro, (quieren optimizar su consumo a lo largo del tiempo).
- los trabajadores deciden su consumo en cada período y los capitalistas la tasa de inversión; pero, el resultado de ambos depende de la decisión del otro grupo tanto como de la propia.
- Hay un único sector, con una sola técnica de producción .
- lo producido puede ser consumido o añadido al stock de capital.
- El trabajo es ilimitado y el capital no se deprecia, por lo que toda inversión representa un incremento en el stock de capital.

Variables del modelo:

- $u1(t)$: proporción de la producción destinada al consumo de los trabajadores para cualquier momento del tiempo t. Está acotada de la siguiente manera

$$c \leq u_1 \leq b \quad con\ 0 < c < b < 1$$

→ Variable de control de trabajadores

- $u2(t)$: resto de la producción, (destinada a la inversión). También está acotada:

$$0 \leq u_2 \leq 1$$

→ Variable de control de capitalistas

- a es la proporción de producción y capital fijo.
- $k(t)$ es el stock de capital para cualquier momento del tiempo t.

Producción total: $ak(t)$
Consumo de los trabajadores: $ak(t)u_1(t)$
Inversión: $ak(t)[1-u_1(t)]u_2(t)$
Consumo de los capitalistas: $ak(t)[1-u_1(t)][1-u_2(t)]$

Consumo de trabajadores → $J_1 = \int_0^T ak(t)u_1 dt$

Consumo de capitalistas → $J_2 = \int_0^T ak(t)[1 - u_1(t)][1 - u_2(t)]dt$

Ambos quieren maximizar el consumo sujeto a:

La trayectoria dinámica del stock de capital (la única variable de estado),

$$\dot{k}(t) = ak(t)[1 - u_1(t)]u_2(t)$$

Se tienen dos problemas de maximización , el de los trabajadores, y el de los capitalistas.

- Cuando se maximice el problema de los trabajadores la variable de control será $u_1(t)$, siendo $\bar{u}_2$ una constante.
- Cuando se maximice el problema de los capitalistas la variable de control será $u_2(t)$, siendo $\bar{u}_1$ una constante.

Resolución del problema de los trabajadores

$$\max \int_0^T ak(t)u_1(t)dt$$

Sa.

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = ak(t)[1-u_1(t)]u_2, \\ k(0) = k_0 \\ k(T) = libre \\ c \leq u_{1(t)} \leq b \end{cases}$$

$$H_1 = ak(t)u_1(t) + \lambda_1 ak(t)[1-u_1(t)]u_2$$

Donde λ_1 es la variable de coestado, la cual representa la variación del consumo total de los trabajadores ante un aumento marginal en el stock de capital.

Condiciones de principio de máximo de Pontryagin:

(i) $H_1(k, u_1^*, t, \lambda_1) \geq H_1(k, u_1, t, \lambda_1)$

(ii) $\dfrac{\partial H_1}{\partial \lambda_1} = \dot{k} = ak(t)[1-u_1(t)]u_2$

(iii) $\dfrac{\partial H_1}{\partial k} = -\dot{\lambda_1} = \lambda_1 a[1-u_1(t)]u_2 + au_1(t)$

(iv) $\lambda_1(T) = 0$

Dado que los trabajadores no ven más allá del horizonte temporal, el valor marginal de la inversión al final del periodo es cero, de allí se obtiene la condición de transversalidad $\lambda_1(T) = 0$.

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_1} = 0$$

$$\alpha k(t) - \lambda_1 \alpha k(k) u_2 = 0$$

$$\alpha k(k)(1 - \lambda_1 u_2) = 0$$

$$\lambda_1 u_2 = 1$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial u_1} < 0 \Rightarrow \lambda_1 u_2 > 1 \Rightarrow \downarrow u_1$$

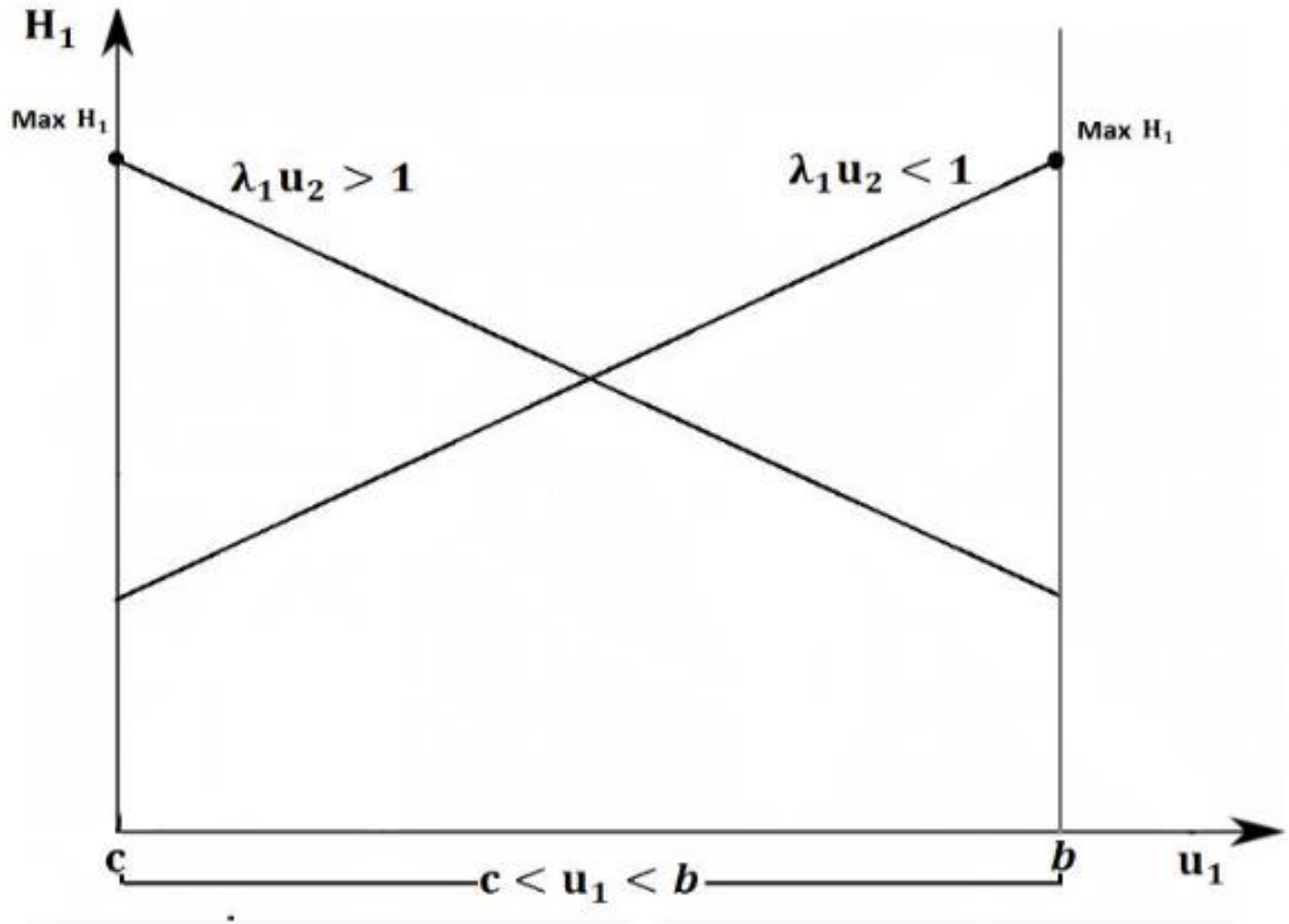
$$\frac{\partial H_1}{\partial u_1} > 0 \Rightarrow \lambda_1 u_2 < 1 \Rightarrow \uparrow u_1$$

- cuando u está acotada la derivada de H con respecto a u igualada a cero arroja el punto en el cual u pasa de tomar el valor mínimo a tomar el valor máximo. Cuando tome valores menores a cero, $u1$ tomará el valor mínimo posible. En cambio, cuando tome valores mayores a cero, $u1$ tomará el valor máximo posible

A partir de la última ecuación se puede ver que la variación del consumo de los trabajadores es inversa a la proporción de la inversión que realizan los capitalistas. Es decir, si la proporción de inversión de los capitalistas es mayor a 1, los trabajadores disminuirán su consumo, en cambio, si la proporción es menor a 1, los trabajadores aumentaran su consumo.

Al ser un modelo lineal y como la variable de control está acotada, las soluciones se encuentran en los extremos:

$$u_1^* = \begin{cases} c \; si \; \lambda_1 u_2 > 1 \\ b \; si \; \lambda_1 u_2 < 1 \end{cases}$$


H1
Max H1
λ1u2 > 1
λ1u2 < 1
Max H1
c
c < u1 < b
b
u1

Problema del capitalista

$$\max \int_0^T ak(t)[1-u_1(t)][1-u_2(t)]dt$$

Sa. $\dot{k}(t) = ak(t)[1-u_1(t)]u_2,$

$$k(0) = k_0$$
$$k(T) = libre$$
$$0 \leq u_{2(t)} \leq 1$$

$$H_2 = \alpha k(t)[1-u_1][1-u_2(t)] + \lambda_2 \alpha k(t)[1-u_1]u_2(t)$$

La variable de coestado λ_2 es diferente de la expuesta en el problema de los trabajadores, ya que representa el valor marginal de la inversión.

Condiciones del principio del máximo de Pontryagin:

(i) $H_2(k, u_2^*, t, \lambda_2) \geq H_2(k, u_2, t, \lambda_2)$

(ii) $\frac{\partial H_2}{\partial \lambda_2} = \dot{k} = \alpha k(t)[1-u_1]u_2(t)$

(iii) $\frac{\partial H_2}{\partial k} = -\dot{\lambda_2} = \lambda_2 \alpha(1-u_1)u_2(t) + \alpha(1-u_1)[1-u_2(t)]$

(iv) $\lambda_2(T) = 0$

Dado que los capitalistas tampoco ven más allá del horizonte temporal, el valor marginal de la inversión al final del periodo es cero, obteniendo así la condición de transversalidad $\lambda_2(T) = 0$.

Por el principio del máximo, el óptimo de u_2 maximizará H_2 para cada momento del tiempo sujeto a $0 \leq u_1 \leq 1$ y a los valores de k y λ_2 en el tiempo.

Para poder hallar la solución, se debe derivar H_2 con respecto a u_2 e igualar la derivada a cero. Cuando la derivada del Hamiltoniano con respecto a la variable de control tome valores menores a cero, u_2 tomará el valor mínimo posible. En cambio, cuando la derivada del Hamiltoniano con respecto a la variable de control tome valores mayores a cero, u_2 tomará el valor máximo posible:

$$\frac{\partial H_2}{\partial u_2} = 0$$

$$-\alpha k(k)(1-u_1) + \lambda_2 \alpha k(k)(1-u_1) = 0$$

$$\lambda_2 \alpha k(k)(1-u_1) = \alpha k(k)(1-u_1)$$

$$\lambda_2 = 1$$

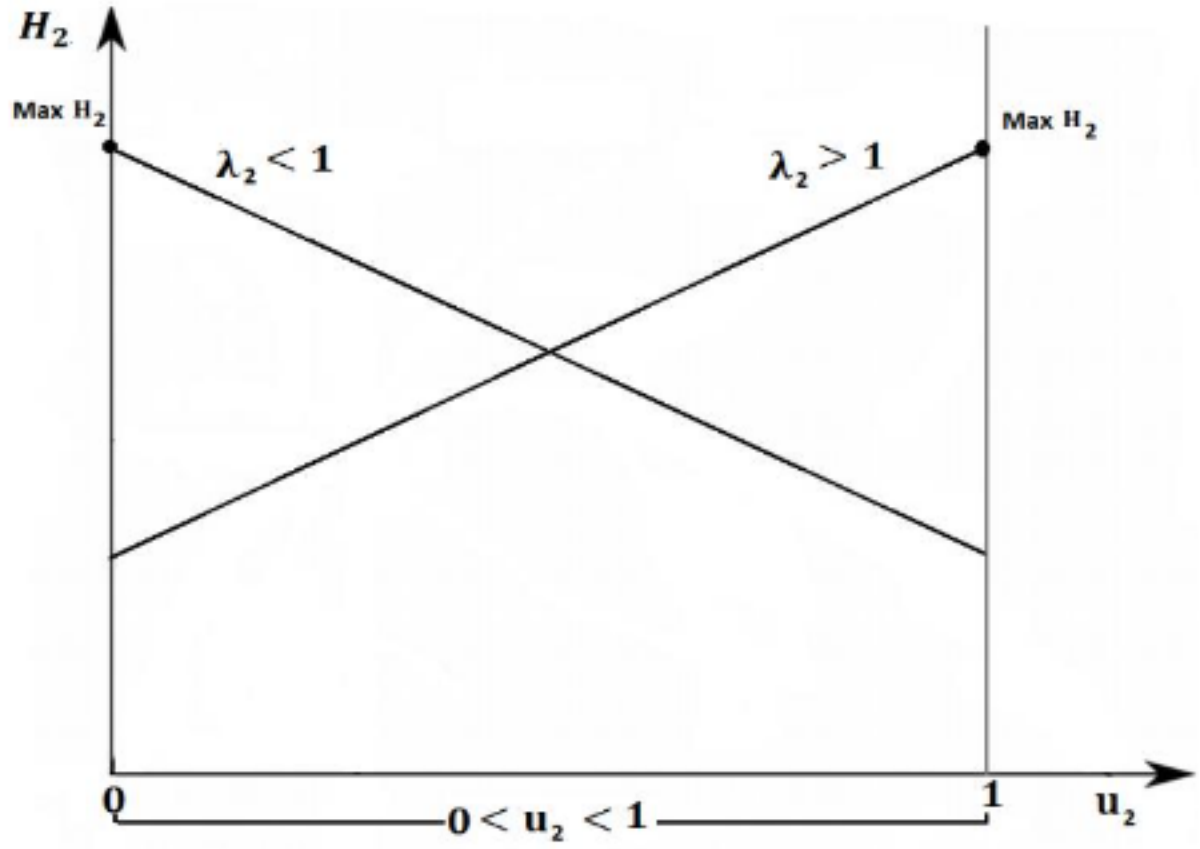
A partir de la última ecuación se puede observar que la inversión es siempre constante, es decir, aumenta en 1 unidad. Por lo tanto, si la relación es menor a 1, los capitalistas disminuirán la inversión, en cambio, si la relación es mayor a 1, los capitalistas aumentarán la inversión.

$$\frac{\partial H_2}{\partial u_2} < 0 \Rightarrow \lambda_2 < 1 \Rightarrow \downarrow u_2$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial u_2} > 0 \Rightarrow \lambda_2 > 1 \Rightarrow \uparrow u_2$$

Nuevamente, al ser un modelo lineal y como la variable de control está acotada, las soluciones se encuentran en los extremos:

$$u_2^* = \begin{cases} 0 \; si \; \lambda_2 < 1 \\ 1 \; si \; \lambda_2 > 1 \end{cases}$$


H_2
Max H_2
$\lambda_2 < 1$
$\lambda_2 > 1$
Max H_2
0
1
u_2
$0 < u_2 < 1$

A partir de la resolución de los problemas de maximización se obtiene que el consumo óptimo de los trabajadores puede tomar los valores c y b, mientras que el consumo optimo de los capitalistas puede tomar valores 0 y 1. Existen solo cuatro combinaciones lineales posibles que permiten hallar el punto de coincidencia entre los consumos máximos de ambos agentes:

I	$u_1 = c\ ;\ u_2 = 0$	si	$\lambda_1 u_2 > 1$	$\lambda_2 < 1$
II	$u_1 = b\ ;u_2 = 0$	si	$\lambda_1 u_2 < 1$	$\lambda_2 < 1$
III	$u_1 = c\ ;u_2 = 1$	si	$\lambda_1 u_2 > 1$	$\lambda_2 > 1$
IV	$u_1 = b\ ;u_2 = 1$	si	$\lambda_1 u_2 < 1$	$\lambda_2 > 1$

La opción I debe ser descartada, ya que la combinación de $u_2 = 0$ y $\lambda_1 u_2 > 1$ es incompatible.

La opción IV debe ser descartada, porque, que sea $u_2 = 1$ significa que se invierte toda la producción, por lo tanto, no hay posibilidad de consumo. Lo que significa que u_1 no puede tomar el valor de b.

Las únicas opciones compatibles son la II y la III, ya que para que el trabajador pueda maximizar su consumo, el capitalista debe tener la menor proporción posible de la producción. Por el contrario, para que el capitalista pueda maximizar la inversión, el trabajador debe tener la menor proporción de la producción.

Otros ejemplos

Dado el siguiente problema de maximización:

$$max \int_0^{\infty} \ln(Ac)\, e^{-\delta t} dt$$
$$s.a\ \dot{k} = \ln(k) - c - k$$
$$k(0) = 0$$
$$con\ c; \delta > 0$$

a) El Hamiltoniano asociado al problema de maximización es el siguiente:
$H_c = He^{\delta t} = \ln(Ac) + \mu[\ln(k) - c - k]$ donde $\mu = \lambda e^{\delta t}$

b) Condiciones del principio del máximo de Pontryagin:

$$(i) \quad \frac{\partial H_c}{\partial c} = \frac{A}{c} - \mu = 0$$
$$(ii) \quad \dot{k} = \frac{\partial H_c}{\partial \mu} = ln(k) - c - k$$
$$(iii) \quad \dot{\mu} = -\frac{\partial H_c}{\partial k} + \delta\mu \Rightarrow \dot{\mu} = \mu\left(\delta + 1 - \frac{1}{k}\right)$$

A partir de la condición (i) se despeja μ y se deriva con respecto al tiempo:

$$\mu = \frac{A}{c}$$
$$\dot{\mu} = -\frac{A}{c^2}\dot{c}$$

c) Reemplazando μ y $\dot{\mu}$ en la condición (iii) se obtiene la Ecuación de Euler:

$$-\frac{A}{c^2}\dot{c} = \frac{A}{c}\left(\delta + 1 - \frac{1}{k}\right)$$

$$\dot{c} = c\left(\frac{1}{k} - 1 - \delta\right)$$

Ésta, junto a la ecuación de movimiento forman el sistema de ecuaciones diferenciales autónomas:

$$\begin{cases} \dot{c} = c\left(\frac{1}{k} - 1 - \delta\right) \\ \dot{k} = ln(k) - c - k \end{cases}$$

Igualando las ecuaciones $\dot{k}$ y $\dot{c}$ a cero, se obtienen las curvas de demarcación:

$$\begin{cases} \dot{c} = 0 \quad k = \dfrac{1}{1+\delta} \\ \dot{k} = 0 \quad c = ln(k) - k \end{cases}$$

d) Siendo $\dot{k} = \ln(k) - c - k$, las curvas de demarcación correspondientes son:

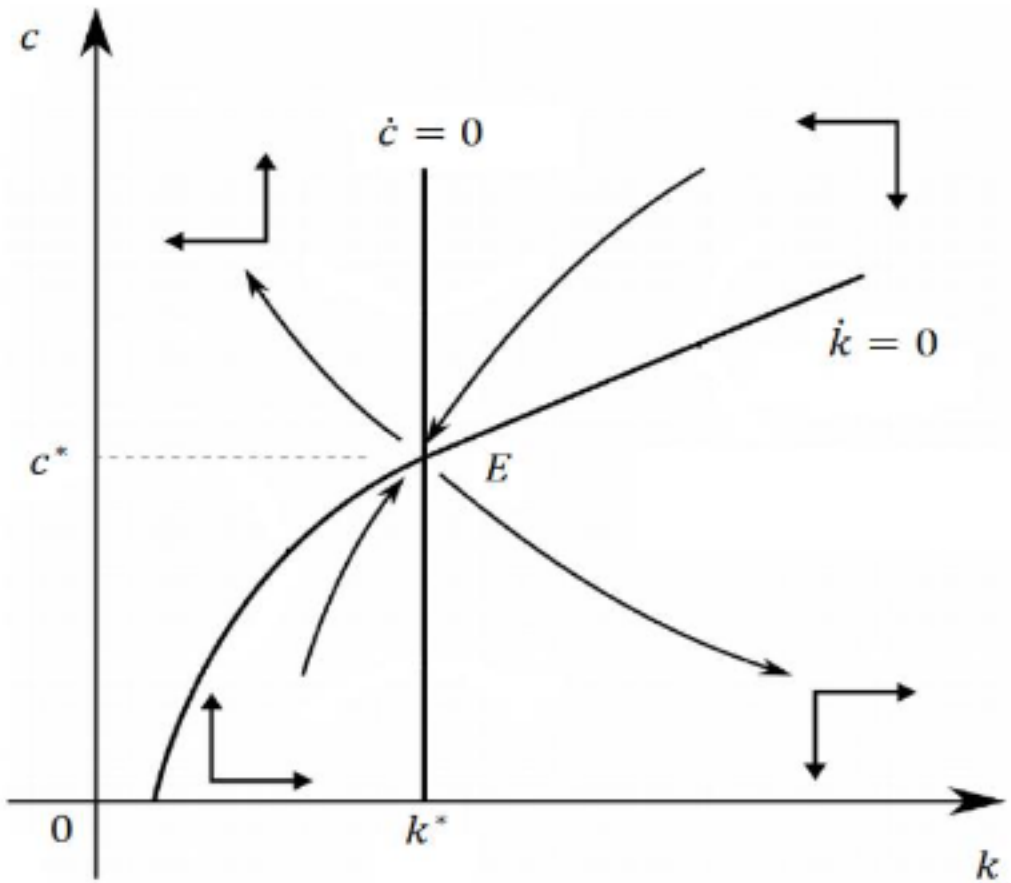
$$\begin{cases} \dot{c} = 0 \quad k = \dfrac{1}{1+\delta} \\ \dot{k} = 0 \quad c = ln(k) + k \end{cases}$$

Para poder analizar el diagrama de fase, es necesario calcular las "derivadas cruzadas" de las ecuaciones diferenciales autónomas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \dot{c}}{\partial k} = -\dfrac{c}{k^2} < 0 \\ \dfrac{\partial \dot{k}}{\partial c} = -1 < 0 \end{cases}$$

Como $\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} < 0$, todos los puntos debajo de la curva $\dot{k} = 0$ se caracterizan por $\dot{k} > 0$, y todos los puntos por arriba de la curva por $\dot{k} < 0$.

Análogamente, como $\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} < 0$, todos los puntos a la izquierda de la recta $\dot{c} = 0$ se caracterizan por $\dot{c} > 0$ y todos los puntos a la derecha por $\dot{c} < 0$.



Dado el siguiente problema de maximización:

$$max \int_0^1 -u^2 dt$$
$$s.a\ \dot{y} = y + u$$
$$con\ \ y(0) = 1\ ;\ y(1) \geq 3$$

a) El Hamiltoniano asociado al problema de maximización es el siguiente:

$$H(t, y, u) = -u^2 + \lambda(y + u)$$

Condiciones del principio del máximo de Pontryagin:

(i) $\quad H(t, y, u^*, \lambda) \geq H(t, y, u, \lambda)$

(ii) $\quad \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{y} = y + u$

(iii) $\quad \dfrac{\partial H}{\partial y} = -\dot{\lambda} = \lambda$

Como T está fijos y y_T libre pero sujeta a $y(1) \geq 3$, la condición terminal es una $Vertical\ Truncada$ y su respectiva condición de transversalidad es:

(iv) $\quad \lambda(1) \geq 0\ ;\ y(1) \geq 3\ ;\ (y(1) - 3)\lambda(1) = 0$

b) A partir de las condiciones (i) y (ii) se pueden obtener las trayectorias optimas de las variables de control u y de coestado λ. Para ello, se deriva el Hamiltoniano y se iguala a cero, obteniendo así el valor de u:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$
$$-2u + \lambda = 0$$
$$u = \frac{\lambda}{2}$$

Luego se resuelve la ecuación diferencial homogénea (iii) y se obtiene la trayectoria óptima de λ

$$-\dot{\lambda} = \lambda$$
$$\dot{\lambda} + \lambda = 0 \quad (..)$$
$$\lambda^*(t) = C_1 e^{-t}$$

Se reemplaza la trayectoria óptima de λ en la derivada del Hamiltoniano con respecto a u igualada a cero, obteniendo así la ecuación de Euler (trayectoria óptima de la variable de control)

$$u^*(t) = \frac{C_1}{2} e^{-t}$$

c) Al reemplazar la trayectoria óptima de λ en la condición (ii) se obtiene una ecuación diferencial:

$$\dot{y} - y = \frac{C_1}{2} e^{-t}$$

Resolviendo tanto la parte homogénea como la complementaria de la ecuación se llega a la trayectoria óptima de la variable de estado

$$y^*(t) = c_2 e^t - \frac{c_1}{4} e^{-t}$$

d) Como se vio anteriormente, dada una condición terminal, la condición de transversalidad debe cumplir:

$$\underbrace{\lambda(T)\Delta y_T}_{=0} = 0$$

En el caso de línea vertical truncada, el enfoque práctico a abordar es el siguiente: probar $\lambda\,(T) = 0$ como condición de transversalidad, y si el $y(T) = y_T$ resultante satisface $yT \geq y_{min}$; si no, se trata como un problema de punto terminal fijo con el valor y_{min} como punto fijo.

I. Con $\lambda(T) = 0$:

$$\begin{cases} \lambda(1) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(t) = c_2 e^t - \dfrac{c_1}{4} e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y(1) = e < 3$$

Con $\lambda(T) = 0$ se viola la condición $y(1) \geq 3$. Por lo tanto, $y(T)$ debe ser igual a y_{min}.

II. Con y_{min} como punto fijo:

Para hallar la solución particular, se arma un sistema de ecuaciones usando las condiciones inicial y final:

$$\begin{cases} \lambda(1) = 0 \\ y(0) = 3 \\ y(t) = c_2 e^t - \frac{c_1}{4} e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 + \frac{c_1}{4} \\ c_1 = \frac{12e - 4e^2}{e^2 - 1} \end{cases}$$

Reemplazando las contantes en las soluciones generales, las trayectorias óptimas quedan definidas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u^*(t) = \left(\frac{6e - 2e^2}{e^2 - 1}\right) e^{-t} \\ y^*(t) = \left(\frac{3e - 1}{e^2 - 1}\right) e^t - \left(\frac{3e - e^2}{e^2 - 1}\right) e^{-t} \\ \lambda^*(t) = \left(\frac{12e - 4e^2}{e^2 - 1}\right) e^{-t} \end{cases}$$

Demostración de condiciones del Principio de Máximo de Pontryagin

$$Maximizar \quad V = \int_0^T F[t, u(t), y(t)]dt \tag{1}$$

$$sujeto\ a \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = g[t, u(t), y(t)] \tag{2}$$

$$con \quad y(0) = y_0 \ \ (y_0\ dado)\ ;\ y(T) = y_T\ (condición\ terminal) \tag{3}$$

$$u(t) \in U \quad \forall \quad t \in [0, T] \tag{4}$$

$$H(t, y, u, \lambda) \equiv F(t, y\ u) + \lambda(t) g(t, y, u) \tag{5}$$

Si se re expresa la ecuación de movimiento (2) del problema como $g(t,u,y) - \dot{y} = 0$ y se multiplican ambos miembros de la igualdad por la variable de coestado, la integral entre el momento 0 y el momento T resulta:

$$W = \int_0^T \lambda(t)[g(t,u,y) - \dot{y}]dt = 0 \tag{6}$$

como este término es idénticamente 0, se lo puede sumar al Funcional objetivo V del problema (1) sin alterar el resultado, llamando J al nuevo funcional objetivo

$$J = V + W$$

$$J = \int_0^T \{F(t,y,u) + \underbrace{\lambda(t)[g(t,u,t) - \dot{y}]}_{=0}\} dt \tag{7}$$

Reemplazando por la definición del Hamiltoniano en (5), puede escribirse de la siguiente manera:

$$J = \int_o^T [H(t,y,u,\lambda) - \lambda(t)\dot{y}]dt$$

Es decir,

$$J = \int_0^T H(t,y,u,\lambda)dt - \int_0^T \lambda(t)dt \tag{8}$$

Integrando por partes[10] se llega a:

$$-\int_0^T \lambda(t)dt = -\lambda(T)y_T + \lambda(0)y_0 + \int_0^T y(\dot{t})\lambda dt \tag{9}$$

Si se sustituye la ecuación 9 en la ecuación 8 se obtiene

$$J = \int_0^T \left[H(t,y,u,\lambda) + y(t)\dot{\lambda}\right]dt - \lambda(T)y_T + \lambda(0)y_0 \tag{10}$$

Al derivar el Hamiltoniano (5) con respecto a λ:

$$\frac{\partial H(t,y,u,\lambda)}{\partial \lambda} = g(t,y,u) \tag{11}$$

Se llega a la (ii) condicion del principio del máximo

$$\dot{y} = \frac{\partial H(t,y,u,\lambda)}{\partial \lambda} \Rightarrow \dot{y} = g(t,y,u)$$

[10] Para poder integrar por partes se establece que:

$$z = \lambda(t) \Rightarrow dz = \dot{\lambda}dt$$
$$w = y(t) \Rightarrow dw = \dot{y}dt$$

Al ser $\lambda(t)\dot{y}dt = zdw$, se tiene:

$$-\int_0^T \lambda(t)dt = -[\lambda(t)y(t)]_0^T + \int_0^T y(\dot{t})\lambda dt$$

Continuando con las restantes condiciones, se pasará al estudio de la trayectoria de $u(t)$ y su efecto sobre $y(t)$.

Si se conocen las trayectorias óptimas para y^* y u^*, y se añaden perturbaciones, $q(t)$ y $p(t)$ respectivamente, se obtienen dos familias de senderos:

$$y(t) = y^* + \epsilon q(t) \quad (12)$$

$$u(t) = u^* + \epsilon p(t) \quad (13)$$

Si a esto se le añade la condición de que el momento terminal T y el valor terminal y_T sean variables, se puede expresar:

$$T = T^* + \epsilon \Delta T \Rightarrow \frac{dT}{d\epsilon} = \Delta T \quad (14)$$

$$y_T = y_T^* + \epsilon \Delta y_T \Rightarrow \frac{dy_T}{d\epsilon} = \Delta y_T \quad (15)$$

Siendo T^* y y_T^* el horizonte temporal y el valor terminal óptimos respectivamente.

Tomando las nuevas expresiones de y y u en 12 y 13 y sustituyéndolas en 10 se obtiene:

$$J = \int_0^{T(\epsilon)} \{[H(t, y^* + \epsilon q(t), u^* + \epsilon p(t), \lambda)] + \dot{\lambda}[y^* + \epsilon q(t)]\} dt - \lambda(T) y_T + \lambda(0) y_0 \quad (16)$$

El funcional objetivo queda expresado en términos de ϵ[11], sobre el cual se puede aplicar la condición de primer orden de maximización $\frac{dJ}{d\epsilon} = 0$

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_0^{T(\epsilon)} \left\{\left[\frac{\partial H}{\partial y} q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t)\right] + \dot{\lambda} q(t)\right\} dt + \left[H + \dot{\lambda} y\right]_{t=T} \frac{dT}{d\epsilon} - \lambda(T) y_T - y_T \frac{d\lambda(T)}{dT} \frac{dT}{d\epsilon} = 0 \quad (17)$$

O alternativamente

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_0^{T(\epsilon)} \left\{\left[\frac{\partial H}{\partial y} q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t)\right] + \dot{\lambda} q(t)\right\} dt + \left[H + \dot{\lambda} y\right]_{t=T} \Delta T - \lambda(T) \Delta y_T - y_T \dot{\lambda}(T) \Delta T = 0 \quad (18)$$

Al ser $\left[\dot{\lambda} y\right]_{t=T} \frac{dT}{d\epsilon} = y_T \dot{\lambda}(T) \Delta T$, se simplifica la ecuación 18. Teniendo esto en cuenta y reagrupando el integrando se llega a:

$$\frac{dJ}{d\epsilon} = \int_0^{T(\epsilon)} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \dot{\lambda}\right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t)\right] dt + H_{t=T} \Delta T - \lambda(T) \Delta y_T = 0 \quad (19)$$

Control Óptimo Discreto – parte 1

Material complementario

Se deberá acompañar con la siguiente lectura:

CERDA, E. *Optimización Dinámica*, Prentice Hall, Madrid, 2001, capítulos 6 y 7

Prof.: Rita Beatriz Morrone

Dado el siguiente problema del inversor donde x_t es la cantidad de dinero en el t-ésimo año y u_t la cantidad de dinero reinvertido:

$$\max \sum_{t=1}^{T} b\sqrt{x_t - u_t} \quad s.a.\, x_{t+1} = a\, u_t;\ 0 \le u_t \le x_t; con\ x_1\ dado$$

a. Plantear las CPO utilizando el método de Lagrange
b. Resolver utilizando el método de Lagrange
c. Encontrar la relación entre la variable de estado y la de control (mediante Bellman)
d. Encontrar la ecuación de Euler y resolver las ecuaciones en diferencia

Paso 1 – antes de comenzar con la resolución, identificamos el problema en cuestión ; En este caso nos enfrentamos a un problema del inversor , donde:

$x_t \rightarrow cantidad\ de\ dinero\ en\ el\ año\ t$

$u_t \rightarrow cantidad\ invertida\ en\ el\ año\ t$

$$por\ ende\ \ x_t - u_t \ \rightarrow cantidad\ de\ dinero\ gastado \quad \wedge \quad 0 \le u_t \le x_t$$

A partir de acá tenemos 2 supuestos:

$(1 + r) = a$, *tasa de interés constante (entre 0 y 1) que aplicamos al dinero invertido , por lo que si invertimos* u_t *en un período t , en el próximo período obtenemos* $\rightarrow x_{t+1} = a.u_t$

$r(x_t - u_t) =$ *función de retorno del año t (utilidad de gastar el dinero , en vez de invertirlo)* $= \sqrt[b]{x - u}$

La función de Lagrange correspondiente al problema (*P*) es:

$$L = \sum_{t=0}^{T} f(x_t, u_t) + S(x_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t \left[g(x_t, u_t) - x_{t+1} \right]$$

Las derivadas con respecto a u_t

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{\partial f}{\partial u_t} + \lambda_t \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0 \qquad \forall\, t = 0, \ldots, T$$

Las derivadas con respecto a x_t

$$\frac{\partial L}{\partial x_{t+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{t+1}} + \lambda_{t+1} \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}} - \lambda_t = 0 \qquad \forall\, t = 0, \ldots, T-1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{T+1}} = \frac{\partial S}{\partial x_{T+1}} - \lambda_T = 0 \qquad t = T$$

Las derivadas con respecto a λ_t

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = g(x_t, u_t) - x_{t+1} = 0 \qquad \forall\, t = 0, \ldots, T$$

Las condiciones suficientes son las mismas que para la optimización con restricciones de igualdad.

Si el problema (*P*) presenta restricciones de desigualdad, vale todo lo visto para optimización con restricciones de desigualdad (Kuhn – Tucker)

AHORA , COMENZAMOS A RESOLVER: (POR MÉTODO DE LAGRANGE)

Objetivo:buscar la trayectoria óptima de la variable de control!!!

V . Control $=u$

V. Estado $=x$

Paso 2 – Armamos el Lagrangiano y buscamos las condiciones de primer órden

$$L(x_t; u_t; \lambda_t) = \sum_{t=1}^{T} b\sqrt{x_t - u_t} + \lambda_t\,(a.\,u_t - x_{t+1})$$

CPO

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{-b}{2}\,(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}} + a\,\lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{t+1}} = \frac{b}{2}\,(x_{t+1} - u_{t+1})^{-\frac{1}{2}} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{T+1}} = -\lambda_T = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = a.\,u_t - x_{t+1} = 0$$

despejo

(a)

$$\lambda_t = \frac{b}{2a}\,(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}}$$

desplazo

$$\lambda_{t+1} = \frac{b}{2a}\,(x_{t+1} - u_{t+1})^{-\frac{1}{2}}$$

despejo

(b)

$$\lambda_t = \frac{b}{2}\,(x_{t+1} - u_{t+1})^{-\frac{1}{2}}$$

De igualar (a) y (b) ;por métodos algebraicos obtenemos:

De igualar (a) y (b) ;por métodos algebraicos obtenemos:

$$\frac{b}{2a}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{b}{2}(x_{t+1} - u_{t+1})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{a}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}} = (x_{t+1} - u_{t+1})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left[\frac{1}{a}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2} = \left[(x_{t+1} - u_{t+1})^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}$$

$$a^2\,(x_t - u_t) - x_{t+1} + u_{t+1} = 0$$

Paso 3- armamos un sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} a^2\,(x_t - u_t) - x_{t+1} + u_{t+1} = 0 & (1) \\ x_{t+1} - a u_t = 0 & (2) \end{cases}$$

$de\ (2)$

$$u_t = \frac{x_{t+1}}{a} \xrightarrow{\text{desplazo}} u_{t+1} = \frac{x_{t+2}}{a}$$

Sustituyo ambas en (1)

$$a^2\left(x_t - \frac{x_{t+1}}{a}\right) - x_{t+1} + \frac{x_{t+2}}{a} = 0$$

$$a^2\,(x_t) - x_{t+1}(a+1) + \frac{x_{t+2}}{a} = 0$$

$$\frac{x_{t+2}}{a} - x_{t+1}(a+1) + a^2\,(x_t) = 0$$

Ecuación en diferencia

$$\frac{x_{t+2}}{a} - x_{t+1}(a+1) + a^2(x_t) = 0$$

Ecuación en diferencia homogénea

se obtiene que las raíces serán $(r_1; r_2) = \frac{(a+1) \pm \sqrt{a^2-2a+1}}{\frac{2}{a}}$

Entonces , obtenemos la solución del sistema

$$x_t = c_1 r_1^t + c_2 r_2^t$$

$$u_t = \frac{c_1 r_1^{t+1} + c_2 r_2^{t+1}}{a}$$

desplazo

$$x_{t+1} = c_1 r_1^{t+1} + c_2 r_2^{t+1}$$

Reemplazo y sustituyo, en :

$$u_t = \frac{x_{t+1}}{a}$$

$$u_t = \frac{c_1 r_1^{t+1} + c_2 r_2^{t+1}}{a}$$

RESOLUCIÓN CON MÉTODO DE BELLMAN

El problema del principio de optimalidad puede ser planteado en términos de una relación recursiva

$$V_t(x) = máx\ \{\ b\sqrt{x_t - u_t} + V_{t+1}(x_{t+1})\ \}$$

Función valor

Paso 1 –planteo la ecuación de Bellman

Comenzamos con t = T, en este caso

$$\begin{cases} V_T(x_T) = b\sqrt{x_T - u_T} \text{ ya que } V_{T+1}(x_{T+1}) = 0 \\ X_{T+1} = a.u_T = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $V_T(x_T) = b\sqrt{x_T}$

Realizamos lo mismo para t = T-1

$$\begin{cases} V_{T-1}(x_{T-1}) = b\sqrt{x_{T-1} - u_{T-1}} + b\sqrt{x_T} & \textbf{(1)} \\ X_T = a.u_{T-1} & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Reemplazando **(2)** en **(1)** obtenemos $V_{T-1}(x_{T-1}) = b\sqrt{x_{T-1} - u_{T-1}} + b\sqrt{a.u_{T-1}}$ **(3)**

Entonces, $\frac{\partial V_{T-1}}{\partial u_{T-1}} = \frac{-b}{2}(x_{T-1} - u_{T-1})^{-\frac{1}{2}} + \frac{ba}{2}(u_{T-1}a)^{-\frac{1}{2}} = 0$

Despejando u_{T-1} llegamos a la siguiente expresión

La secuencia de variables de control será óptima para el problema ,si y solo si ,cualquier subconjunto de variables de control (desde cualquier t hasta T , también es óptima.

Es la regla que relaciona un valor de la v.control en eq. en función de la v de estado

$u_{T-1} = \frac{a\,x_{T-1}}{(a+1)}$ **(función política)** que reemplazándola en **(3)**

$$V_{T-1}(x_{T-1}) = b\sqrt{(a+1)\,x_{T-1}}$$

Por último, realizamos el mismo proceso para t = T-2

$$\begin{cases} V_{T-2}(x_{T-2}) = b\sqrt{x_{T-2} - u_{T-2}} + b\sqrt{(a+1)x_{T-1}} & \textbf{(4)} \\ X_T = a.u_{T-2} & \textbf{(5)} \end{cases}$$

Reemplazando **(5)** en **(4)** obtenemos $V_{T-2}(x_{T-2}) = b\sqrt{x_{T-2} - u_{T-2}} + b\sqrt{(a+1)a.u_{T-2}}$ **(6)**

Entonces, $\frac{\partial V_{T-2}}{\partial u_{T-2}} = \frac{-b}{2}(x_{T-2} - u_{T-2})^{-\frac{1}{2}} + \frac{ba(a-1)}{2}\left[(a-1)\,a\,u_{T-2}\right]^{-\frac{1}{2}} = 0$

Despejando u_{T-2} (**función política**) llegamos a la siguiente expresión

$u_{T-2} = \frac{(a^2+a)\,x_{T-2}}{a^2+a+1}$ que reemplazándola en **(6)** nos da por resultado:

$V_{T-2}(x_{T-2}) = b\sqrt{(a^2+a+1)\,x_{T-2}}$

Por lo tanto:

- En t=T $\quad u_t^* = 0 \quad y \quad V_T(x_T) = b\sqrt{x_T}$
- En t=T-1 $\quad u_{T-1}{}^* = \frac{a\,x_{T-1}}{(a+1)}$ y $V_{T-1}(x_{T-1}) = b\sqrt{(a+1)\,x_{T-1}}$
- En t=T-2 $\quad u_{T-2}{}^* = \frac{(a^2+a)\,x_{T-2}}{a^2+a+1}$ y $V_{T-2}(x_{T-2}) = b\sqrt{(a^2+a+1)\,x_{T-2}}$

Generalizando obtenemos la siguiente función de política y su retorno total:

Es la regla que relaciona un valor de la v.control en eq. en función de la v de estado; la maximización se realiza exclusivamente Con respecto a la v.control , mientras la v.estado Se mantiene constante.

$$u_t(x) = \frac{(a + a^2 + \cdots + a^{T-t})\,x_t}{1 + a + a^2 + \cdots + a^{T-t}} = x_t \cdot \frac{\sum_{s=1}^{T-t} a^s}{\sum_{S=0}^{T-t} a^s}$$

$$v_t(x) = b\sqrt{(1 + a + a^2 + \cdots + a^{T-t})\,x_t} = b\sqrt{\sum_{S=0}^{T-t}(a^s)\,x_t}$$

Ecuación de Euler -------se obtiene a partir de la ecuación de Bellman

Busco una ec.en diferencias que marque la trayectoria óptima de la v.control

$$V_t(x) = máx\ \{\ b\sqrt{x_t - u_t} + \ b\sqrt{x_{t+1}}\ \}$$

Lo primero que tenemos que hacer es plantear la derivada de la función con respecto a la variable de control u_t y la derivada con respecto a la variable de estado x_t :

(1) **1.** $\frac{\partial V_t}{\partial u_t} = \frac{\partial f(x_t,u_t)}{\partial u_t} + \frac{\partial V_{t+1}(x_{t+1})}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial g(x_t,u_t)}{\partial u_t} = 0$

Reemplazando:

$\frac{\partial V_t}{\partial u_t} = \frac{-b}{2}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}}\ a = 0$ de forma que $\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \frac{b}{2a}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}}$

(2) **2.** $\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial f(x_t,u_t)}{\partial x_t} + \frac{\partial V_{t+1}(x_{t+1})}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial g(x_t,u_t)}{\partial x_t}$ → Ecuación de Benveniste y Scheinkman

La variación de xt ,va a afectar directamente a la f.valor a travez de la ec. Del movimiento y a travez de la función de Política ; y por el teorema de la envolvente , llegamos a …

Paso 1

1) La condición de primer orden de la ecuación de Bellman

$$\frac{\partial V_t}{\partial u_t} = \frac{\partial f}{\partial u_t} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0 \qquad (*)$$

Paso 2

2) Despejamos de (*) $\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$:

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_t}}{\frac{\partial g}{\partial u_t}} \qquad (**)$$

Paso 3

3) Reemplazamos la expresión (**) en la ecuación de Benveniste y Scheinkman:

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial f}{\partial x_t} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_t}}{\frac{\partial g}{\partial u_t}} \frac{\partial g}{\partial x_t} \qquad (***)$$

Paso 4) Adelantamos un período la expresión (***):

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{t+1}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g}{\partial u_{t+1}}} \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}}$$

5) Reemplazamos esta última expresión en la condición de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial u_t} + \left[\frac{\partial f}{\partial x_{t+1}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g}{\partial u_{t+1}}} \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}} \right] \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0$$

Ecuación de Euler

Reemplazando:

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{b}{2}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b}{2a}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}}.0$$

Aplicando el operador desplazamiento llegamos a:

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \frac{b}{2}(x_{t+1} - u_{t+1})^{-\frac{1}{2}}$$

Reemplazando la expresión anterior en (**1**)

$$\frac{\partial V_t}{\partial u_t} = \frac{-b}{2}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b}{2}(x_{t+1} - u_{t+1})^{-\frac{1}{2}}\, a = 0$$

Teniendo en cuenta esta última expresión y la restricción del comienzo podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones en diferencia:

$$\begin{cases} a^2\,(x_t - u_t) - x_{t+1} - u_{t+1} = 0 \\ x_{t+1} - \ a\,u_t = 0 \end{cases}$$

Como podrán notar, es el mismo que planteamos utilizando el Método de Lagrange, por lo tanto, resolviendo de la misma forma llegaremos a:

$$x_t = c_1 r_1^t + \ c_2 r_2^t$$

$$u_t = \frac{c_1 r_1^{t+1} + \ c_2 r_2^{t+1}}{a}$$

$$max_{ct} U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \frac{{c_t}^{1-\theta}}{1-\theta} s.a. s_{t+1} = (1+r)(s_t - c_t) \qquad \forall_t = 0, \dots, T, \begin{cases} s(0) = s_0 \\ 0 < \theta < 1 \\ \beta = (1+\delta)^{-1} \end{cases}$$

$$r, \delta > 0$$

Nuestra ecuacion de Bellman será:

$$V_t(s_t) = máx_{ct} \left[\beta^t \frac{{c_t}^{1-\theta}}{1-\theta} + V_{t+1}(s_{t+1}) \right]$$

Pero como existe un factor de descuento β^t debemos transformarla en la Ecuación de Bellman en tiempo corriente. Para ello:

1. Dividimos miembro a miembro por β^t y multiplicamos el segundo termino por $\frac{\beta}{\beta}$:

$$\frac{V_t(s_t)}{\beta^t} = máx_{ct} \left[\frac{\beta^t}{\beta^t} \frac{{c_t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \frac{\beta}{\beta} \frac{V_{t+1}}{\beta^t}(s_{t+1}) \right]$$

2. Simplificamos y sumamos exponentes:

$$\frac{V_t(s_t)}{\beta^t} = máx_{ct} \left[\frac{{c_t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \beta \frac{V_{t+1}}{\beta^{t+1}}(s_{t+1}) \right]$$

3. Renombramos:

$$\frac{V_t(s_t)}{\beta^t} = W_t(s_t)$$

$$\frac{V_{t+1}}{\beta^{t+1}} = W_{t+1}$$

$$W_t(s_t) = máx_{ct}\left[\frac{{c_t}^{1-\theta}}{1-\theta} + \beta W_{t+1}(s_{t+1})\right]$$

Ecuación de Bellman a tiempo corriente (ecuación recursiva).

Para hallar la ecuación de Benveniste y Scheinkman derivamos la ecuacion de Bellman con respecto a la variable de estado s_t:

$$\frac{\partial W_t}{\partial s_t} = \beta \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} \frac{\partial s_{t+1}}{\partial s_t} \Rightarrow \frac{\partial W_t}{\partial s_t} = \beta \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}}(1+r)$$

Obtenemos la ecuación de Euler a partir de la ecuación de Bellman:

1. Planteo la derivada de la función con respecto a la variable de control c_t

$$\frac{\partial W_t}{\partial C_t} = \frac{(1-\theta)\cdot c_t^{-\theta}}{(1-\theta)} + \beta \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} \frac{\partial s_{t+1}}{\partial c_t}$$

$$\frac{\partial W_t}{\partial C_t} = \frac{(1-\theta)\cdot c_t^{-\theta}}{(1-\theta)} - (1+r)\beta \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = 0$$

$$\frac{\partial W_t}{\partial C_t} = c_t^{-\theta} - (1+r)\beta \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = 0$$

2. Despejo $\frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}}$

$$\frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = \frac{c_t^{-\theta}}{(1+r)\beta} \qquad \text{Ⓐ}$$

3. Hallo la derivada de la función respecto de la variable de estado s_t. La hallamos en el inciso anterior, es la ecuacion de Benveniste y Scheinkman:

$$\frac{\partial W_t}{\partial s_t} = \beta \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} (1+r)$$

4. Reemplazo Ⓐ en la ecuacion de Benveniste y Scheinkman

$$\frac{\partial W_t}{\partial s_t} = \beta \frac{c_t^{-\theta}}{(1+r)\beta} (1+r)$$

4. Reemplazo Ⓐ en la ecuacion de Benveniste y Scheinkman

$$\frac{\partial W_t}{\partial s_t} = \beta \frac{c_t^{-\theta}}{(1+r)\beta}(1+r)$$

Simplificando:

$$\frac{\partial W_t}{\partial s_t} = c_t^{-\theta}$$

5. Desplazo un período:

$$\frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = c_{t+1}^{-\theta}$$

6. Reemplazo enⒶ

$$c_{t+1}^{-\theta} = \frac{c_t^{-\theta}}{(1+r)\beta}$$

$$c_{t+1} = c_t \left(\frac{1}{(1+r)\beta}\right)^{\frac{1}{-\theta}}$$

$$c_{t+1} = c_t((1+r)\beta)^{\frac{1}{\theta}}$$

Ecuación de Euler: brinda la trayectoria optima de la variable de control. Nos permite relacionar distintos periodos.

Para una dinámica estable necesitamos que $|r_i| < 1$

Para encontrar la raíz resolvemos la ecuación de Euler:

$$c_{t+1} - c_t((1+r)\beta)^{\frac{1}{\theta}} = 0$$

Ensayo $c_t = r^t \Rightarrow c_{t+1} = r^{t+1}$

$$r^{t+1} - r^t\left((1+r)\beta\right)^{\frac{1}{\theta}} = 0$$

$$r^t\left[r - \left((1+r)\beta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right] = 0$$

Cancelando el término r^t nos queda expresada la ecuación característica asociada a la EED homogénea.

$$\left[r - \left((1+r)\beta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right] = 0$$

Despejando:

$$r = \left((1+r)\beta\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

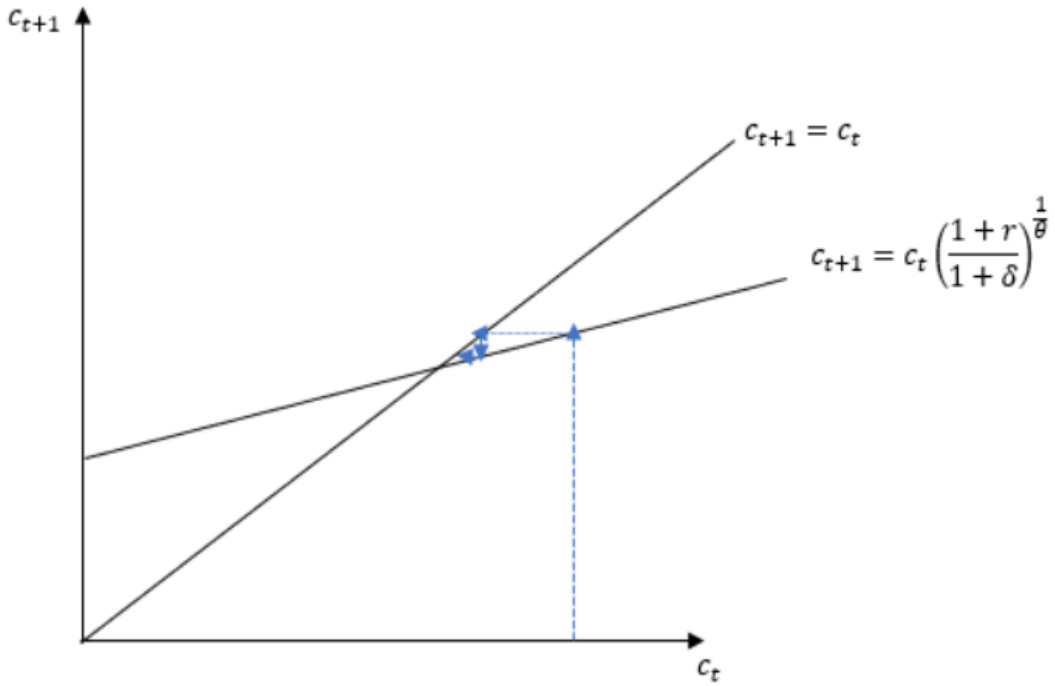
$$r = \left((1+r)\beta\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

O bien:

$$r = \left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

Entonces, para una dinámica de control estable se requiere que $\left|\left(\frac{1+r}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right| <$

1. Es decir, que necesitamos que $\delta > r$**. La pendiente de la recta será positiva pero menor a 1 y por lo tanto será convergente monótona.**



$$\max_{c_t} U = \sum_{t=0}^{T} \frac{\ln c_t}{(1+w)^t} \quad s.a \quad s_{t+1} = (1+r)(s_t - c_t) \quad con \quad s_0 = s_0; s_{T+1} = 0 \quad ; \frac{1}{(1+w)^t} = \beta^t \quad y \quad (1+r) = \alpha$$

a) Resolución utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange:

$$L : \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln c_t + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t [\alpha(s_t - c_t) - s_{t+1}]$$

1) $\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t}\beta^t - \alpha\lambda_t = 0 \qquad \forall t : t = 0\,,\ \ldots\,,\ T$

2) $\frac{\partial L}{\partial s_t} = -\lambda_t + \alpha\lambda_{t+1} = 0 \qquad \forall t : t = 1\,,\ \ldots\,,\ T$

3) $\frac{\partial L}{\partial s_{T+1}} = -\lambda_T = 0$

4) $\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = [\alpha(s_t - c_t) - s_{t+1}] = 0 \qquad \forall t : t = 0\,,\ \ldots\,,\ T$

Despejamos de λ_t de 1) y luego desplazamos un período:

$$(A) \quad \lambda_t = \frac{\beta^t}{c_t}\frac{1}{\alpha} \Longrightarrow (B) \quad \lambda_{t+1} = \frac{\beta^{t+1}}{c_{t+1}}\frac{1}{\alpha}$$

Reemplazamos (A) y (B) en 2) para encontrar la Ecuación de Euler:

$$\frac{\beta^t}{c_t}\frac{1}{\alpha} = \frac{\beta^{t+1}}{c_{t+1}}\frac{1}{\alpha}\alpha$$

$$c_{t+1} = c_t \frac{\beta^{t+1}}{\beta^t}\alpha$$

$$\boxed{c_{t+1} = c_t \beta \alpha}$$

La ecuación de Euler es una ecuación en diferencias homogénea de primer orden con coeficientes constantes. Para encontrar el control óptimo debemos encontrar la solución general. Esta solución general es una función que nos indica la trayectoria óptima de la variable de control.

b) Resolución a partir de la ecuación de Bellman - planteo de la ecuación de Bellman a valor presente:

Planteamos la ecuación de Bellman y luego hacemos la transformación a la ecuación de Bellman a valor presente.

$$V_t(s_t) = \max_{c_t} \left[\ln c_t \beta^t + V_{t+1}(s_{t+1})\right] \quad con \quad s_{t+1} = \alpha(s_t - c_t)$$

$$\frac{V_t(s_t)}{\beta^t} = \max_{c_t} \left[\ln c_t \frac{\beta^t}{\beta^t} + \frac{\beta}{\beta}\frac{V_{t+1}}{\beta^t}(s_{t+1})\right] \; con \; \frac{V_t}{\beta^t} = W_t \; y \; \frac{V_{t+1}}{\beta^{t+1}} = W_{t+1}$$

$$W_t(s_t) = \max_{c_t} \left[\ln c_t + \beta \, W_{t+1}(s_{t+1})\right] \quad con \quad s_{t+1} = \alpha(s_t - c_t)$$

Notar que lo único que hicimos fue un cambio de variables. Para ello dividimos miembro a miembro por β^t. Adicionalmente, multiplicamos el último término del lado derecho de la igualdad por $\frac{\beta}{\beta}$ (que es lo mismo que multiplicar por 1) y, por propiedad de exponentes, finalmente tenemos que $\beta^t.\beta = \beta^{t+1}$. Una vez hecho esto, realizamos un cambio de variables.

c) Resolución a partir de la ecuación de Bellman - búsqueda de la ecuación de Euler:

1) Aplico la CPO sobre la ecuación de Bellman a valor presente:

$$\frac{\partial W_t}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \beta\alpha\frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = 0$$

Luego despejo la expresión $\frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}}$ como sigue,

$$(A) \quad \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = \frac{1}{\alpha\beta c_t}$$

2) Busco la ecuación de Benveniste y Scheinkman:

$$(B) \quad \frac{\partial W_t}{\partial s_t} = \beta\alpha\frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}}$$

3) Reemplazo (A) en (B) y luego desplazo la expresión un período:

$$\frac{\partial W_t}{\partial s_t} = \alpha\beta\frac{1}{\alpha\beta c_t} \quad \Longrightarrow \quad (C) \quad \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = \frac{1}{c_{t+1}}$$

4) Reemplazo (C) en (A). Realizando algunas operaciones llegamos a la ecuacion de Euler:

$$\boxed{c_{t+1} = \alpha\beta c_t}$$

Se puede verificar que llegamos a la misma ecuación a la que llegamos utilizando el método de multiplicadores de Lagrange. Finalmente para hallar el control óptimo debemos resolver la ecuación en diferencias.

$$c_t = k_1(\alpha\beta)^t$$

$$c_t = k_1(\alpha\beta)^t$$

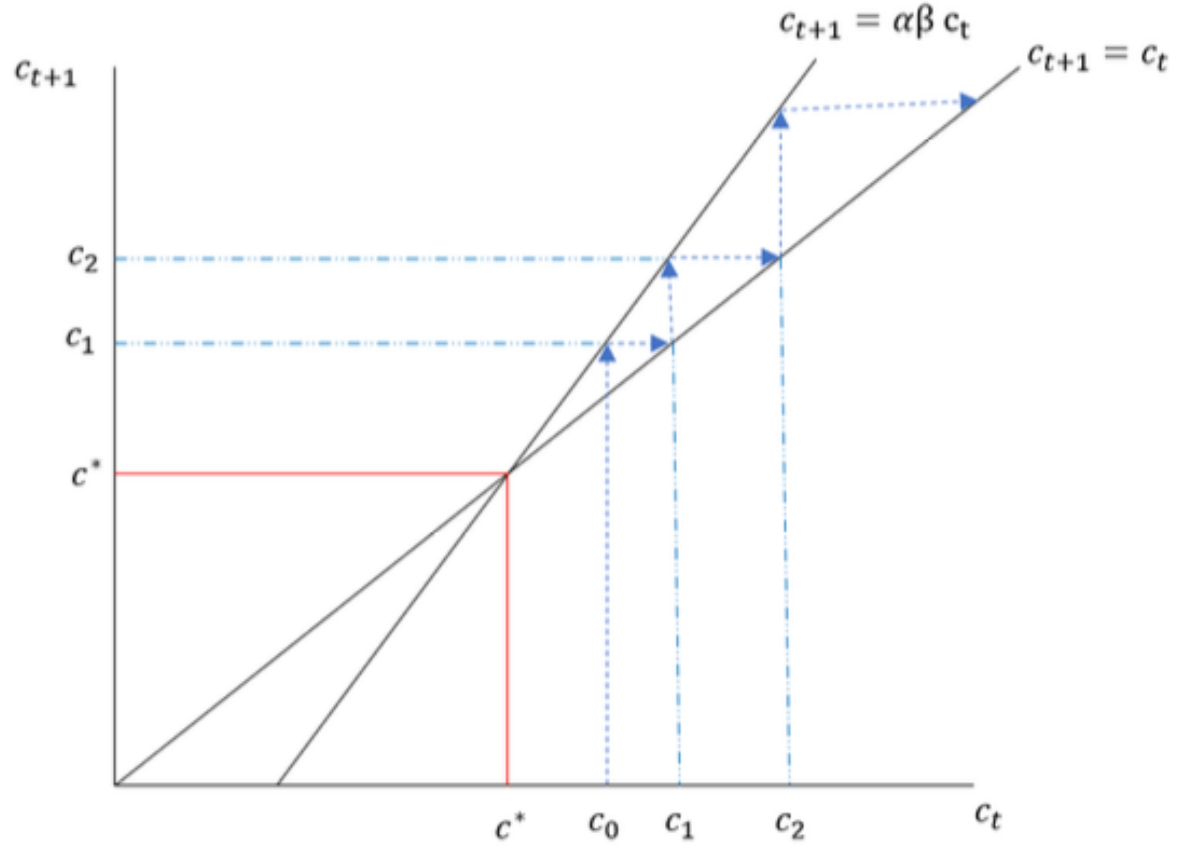
Para analizar la estabilidad de la ecuación en diferencias (EED) debemos determinar si la solución general es convergente al equilibrio. En este caso la ecuación en diferencias es homogénea y por lo tanto, para decir que la EED es estable, la solución general debe tender a cero a medida que pasa el tiempo.

Si el valor absoluto de la raíz $(\alpha\beta)$ es menor a 1, entonces cuando el tiempo tienda a infinito, la solución general va a tender a cero. En particular,si $w < r$ entonces la raíz va a ser mayor a 1 y viceversa.

$$\alpha\beta = \frac{1+r}{1+w}$$

d) Diagrama de fases para el caso donde $(w < r)$:

La intuición económica detrás de esto es que, dado que la valoración subjetiva del agente sobre el futuro es menor que la tasa de interés, siempre va a preferir consumir antes que transferir consumo a períodos siguientes. Eso explica la dinámica divergente del equilibrio.



Conclusión:la EED es inestable porque la raíz es mayor al módulo de 1.

$$\begin{cases} \max_{u_t} V = \sum_{t=0}^{2} -(x_t^2 + u_t^2) - x_3^2 \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = 2x_t + u_t \quad \text{para } t = 0,1,2 \\ \text{con } x_0 = 5 \end{cases}$$

Condiciones necesarias:

$$L = \sum_{t=0}^{2} -(x_t^2 + u_t^2) - x_3^2 + \sum_{t=0}^{2} \lambda_t[2x_t + u_t - x_{t+1}] =$$

$$= -(x_0^2 + u_0^2) - (x_1^2 + u_1^2) - (x_2^2 + u_2^2) - x_3^2 + \lambda_0[2x_0 + u_0 - x_1] + \lambda_1[2x_1 + u_1 - x_2] + \lambda_2[2x_2 + u_2 - x_3]$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_0} = -2u_0 + \lambda_0 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 + 2\lambda_1 - \lambda_0 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = 2x_0 + u_0 - x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2u_1 + \lambda_1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 + 2\lambda_2 - \lambda_1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + u_1 - x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -2u_0 + \lambda_2 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_3} = -2x_3 - \lambda_2 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2x_2 + u_2 - x_3 = 0$$

Al resolver este sistema se obtiene

$$u_0^* = -8 \qquad x_1^* = 2 \qquad \lambda_0^* = -16$$
$$u_1^* = -3 \qquad x_2^* = 1 \qquad \lambda_1^* = -6$$
$$u_2^* = -1 \qquad x_3^* = 1 \qquad \lambda_2^* = -2$$

Condiciones suficientes:

i) $f(x_t, u_t) = -(x_t^2 + u_t^2)$

$$Hf = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

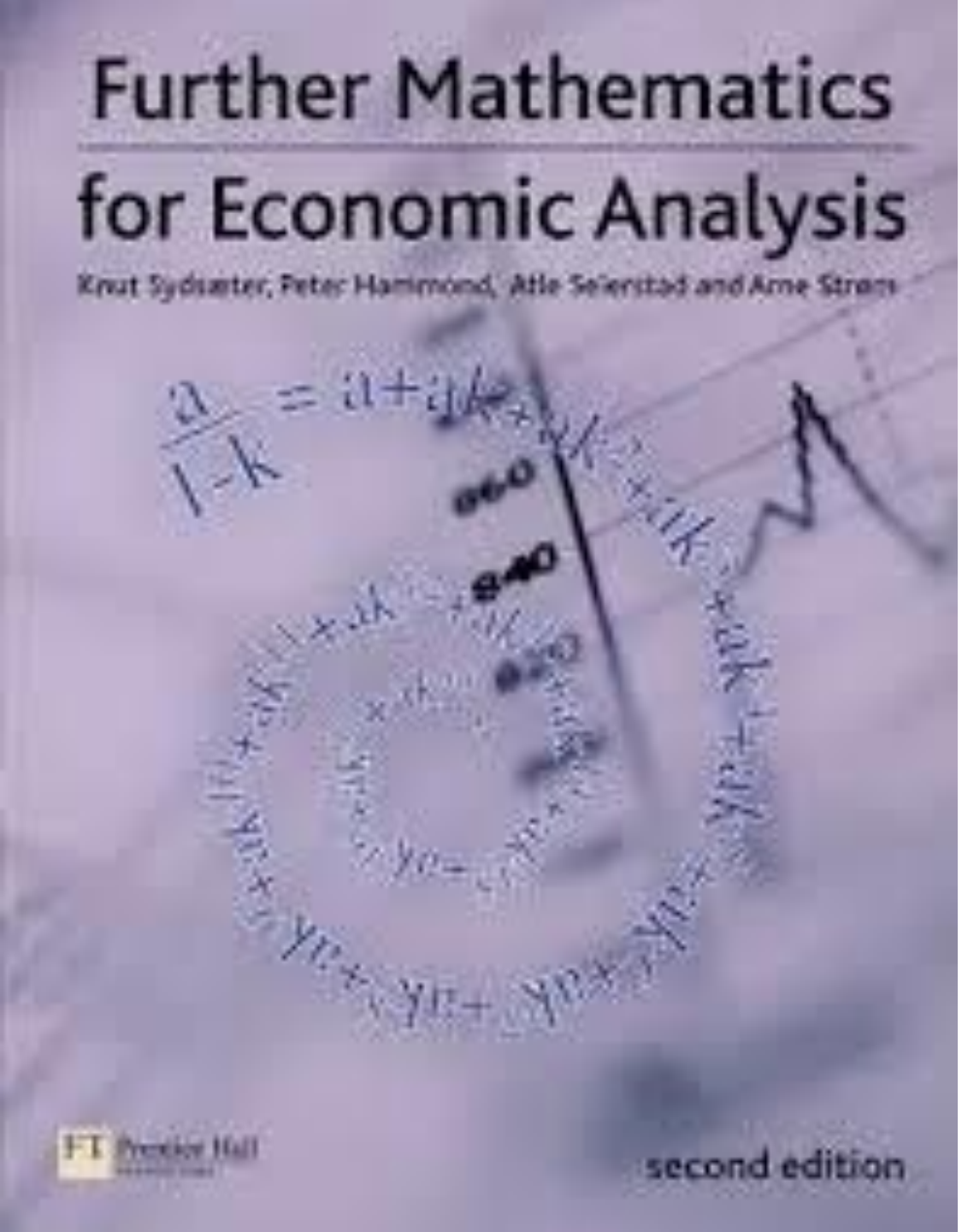
Como la matriz Hessiana es definida negativa, la función es estrictamente cóncava

ii) $g(x_t, u_t) = 2x_t + u_t$

Como la función es lineal, es cóncava y convexa

iii) $S(x) = -x^2$ Es estrictamente cóncava

Concluimos que el problema presenta un máximo global



12 DISCRETE TIME OPTIMIZATION

Nota: Esta presentación se realizó utilizando NotebookLM

Javier García Fronti
Cátedra Matemática Aplicada II

Elementos Clave de un Sistema Dinámico

- **Estado del Sistema (x_t)**:
  - Caracterizado por un número real en cada momento t (ej., cantidad de grano almacenado).
  - El **estado inicial** (x_0) se considera dado históricamente.
- **Variable de Control (u_t)**:
  - Elegida libremente de un **conjunto de control** (U) (ej., cantidad de grano retirada del stock).
- **Ecuación de Diferencia**:
  - Determina la evolución del sistema: $x_{t+1} = g(t, x_t, u_t)$.
  - El estado en $t+1$ depende del tiempo t, del estado x_t y del control u_t.
  - Permite calcular recursivamente los estados futuros ($x_1, x_2, \ldots, x_T$) a partir de x_0 y los controles elegidos.

La Función Objetivo

- Mide la **utilidad o valor** asociado a una secuencia de estados y controles, conocida como "trayectoria" o "camino".
- Se representa como una **suma de utilidades (valores)** obtenidas en cada punto del tiempo:
  - $\sum_{t=0}^{T} f(t, x_t, u_t)$.
- La función $f(t, x, u)$ es una función de tres variables.
- En algunos casos, se incluye un "valor terminal" asociado al estado final (x_T), representado por una función $S(x_T)$.

El Problema de Optimización

- El objetivo principal es **encontrar una secuencia óptima de controles** que ma
  valor de la función objetivo.
- Esto implica encontrar una "pareja de secuencia admisible" ($\{x_t\}, \{u_t\}$) que ha
  valor de la función objetivo "tan grande como sea posible".
- La formulación general del problema es:
  - **Maximizar** $\sum_{t=0}^{T} f(t, x_t, u_t)$
  - **Sujeto a:**
    - $x_{t+1} = g(t, x_t, u_t)$
    - x_0 **dada**
    - $u_t \in U$
- La secuencia de control resultante se denomina "control óptimo".

La Función de Valor

- La **función de valor óptimo** ($J_s(x)$) representa el máximo valor total que se puede obtener a partir de un momento s, dado que el sistema se encuentra en el estado x.
- Se define como la maximización de la suma de utilidades desde el tiempo s hasta el tiempo terminal T:
  - $J_s(x) = \max_{u_s,\ldots,u_T \in U} \sum_{t=s}^{T} f(t, x_t, u_t)$
  - Donde $x_s = x$ y $x_{t+1} = g(t, x_t, u_t)$ para $t \geq s$.
- En el **tiempo terminal** ($t = T$), la función de valor es simplemente la maximización de la utilidad en ese período con respecto al control:
  - $J_T(x) = \max_{u \in U} f(T, x, u)$

La Ecuación de Bellman (Ecuación de Optimalidad)

- Esta es la **herramienta fundamental** para resolver problemas de optimización dinámica.
- Establece una relación recursiva entre la función de valor en el tiempo s y la función valor en el tiempo $s+1$.
- $J_s(x) = \max_{u \in U} [f(s,x,u) + J_{s+1}(g(s,x,u))]$ para $s = 0, 1, \ldots, T-1$.
- **Intuición:** El valor máximo hoy ($J_s(x)$) es el resultado de maximizar la suma de la **recompensa inmediata** ($f(s,x,u)$) más el **valor futuro óptimo** (J_{s+1}) que se puede obtener al pasar al siguiente estado ($g(s,x,u)$).

THEOREM 12.1.1 (FUNDAMENTAL EQUATIONS OF DYNAMIC PROGRAMMING)

For each $s = 0, 1, \ldots, T-1, T$, let $J_s(x)$ be the value function (3) for the problem

$$\max \sum_{t=0}^{T} f(t, x_t, u_t) \quad \text{subject to} \quad x_{t+1} = g(t, x_t, u_t), \quad u_t \in U \tag{5}$$

with x_0 given. Then the sequence of value functions satisfies the equations

$$J_s(x) = \max_{u \in U} \left[f(s, x, u) + J_{s+1}(g(s, x, u)) \right], \quad s = 0, 1, \ldots, T-1 \tag{6}$$

$$J_T(x) = \max_{u \in U} f(T, x, u) \tag{7}$$

Proceso de Solución

- La Ecuación de Bellman se utiliza mediante un proceso de **inducción hacia atrás**.
- **Paso 1: Calcular** $J_T(x)$ utilizando la condición terminal. Esto también determina el control óptimo $u_T^*(x)$ en el último período.
- **Paso 2: Calcular** $J_{T-1}(x)$ utilizando la Ecuación de Bellman con $s = T-1$ y el $J_T(x)$ ya calculado. Esto determina $u_{T-1}^*(x)$.
- **Paso 3: Repetir el proceso** hacia atrás hasta llegar a $s = 0$, calculando $J_s(x)$ y $u_s^*(x)$ en cada paso.
- **Paso 4: Construir la solución óptima hacia adelante:**
    - Dado x_0, encontrar $u_0^*(x_0)$.
    - Usar la ecuación de diferencia para obtener x_1^*.
    - Luego encontrar u_1^* y así sucesivamente hasta x_T^*.

Controles de Bucle Abierto vs. Bucle Cerrado

- **Controles de Bucle Abierto (u_t)**:
  - Dependen **solo del tiempo**.
  - Una vez elegidos, la secuencia de estados queda determinada.
- **Controles de Bucle Cerrado ($u_t^*(x)$)** (o Controles de Retroalimentación):
  - Dependen del **estado actual del sistema**.
  - La Programación Dinámica generalmente produce controles de bucle cerrado.
  - **Ventaja clave:** Si hay una perturbación inesperada que cambia el estado del sistema, el control de bucle cerrado $u_t^*(x_t')$ sigue siendo óptimo para el nuevo estado x_t', asumiendo que no habrá más perturbaciones. Esto no ocurre con los controles de bucle abierto predeterminados.

EJEMPLO 2

EJEMPLO 2

- Consideremos el siguiente problema de optimización dinámica:
  - **Maximizar** $\sum_{t=0}^{3}(1 + x_t - u_t^2)$
  - **Sujeto a:**
    - $x_{t+1} = x_t + u_t$
    - $x_0 = 0$ (estado inicial dado)
    - $u_t \in \mathbb{R}$ (la variable de control pertenece a los números reales)
- Este es un problema de optimización dinámica en tiempo discreto con un horizonte finito.
- Para **casos simples** como este, los problemas de optimización dinámica con horizonte finito pueden, en principio, resolverse utilizando **métodos de cálculo ordinario**.
- La estrategia principal es **transformar la función objetivo** para que dependa únicamente de las variables de control, eliminando las variables de estado intermedias.

Solución mediante el enfoque recursivo de Bellman

- **Objetivo**: Maximizar la siguiente función objetivo:
  - $\text{Max} \sum_{t=0}^{3} (1 + x_t - u_t^2)$
- **Sujeto a las siguientes restricciones**:
  - **Ecuación de Diferencia (Ley de Movimiento)**: $x_{t+1} = x_t + u_t$
  - **Estado Inicial Dado**: $x_0 = 0$
  - **Horizonte Temporal**: $t = 0, 1, 2$ (lo que implica un $T = 3$ para la sumatoria hasta $t = 3$)
  - **Región de Control**: $u_t \in \mathbb{R}$ (los controles u_t pueden ser cualquier número real)

Enfoque de Programación Dinámica

- La Programación Dinámica resuelve problemas de optimización dinámica finitos **trabajando hacia atrás** desde el período final hasta el inicial.
- El **Teorema 12.1.1** es la herramienta fundamental para este proceso. Define la **función de valor óptimo** $J_s(x)$ como el máximo valor obtenible desde el tiempo s hasta el final del horizonte T, dado que el estado en el tiempo s es x.
- La **Ecuación de Bellman** es la relación recursiva clave:
  - $J_s(x) = \max_{u \in U} [f(s, x, u) + J_{s+1}(g(s, x, u))]$ para $s = 0, 1, \ldots, T-1$
  - Con la **condición terminal**: $J_T(x) = \max_{u \in U} f(T, x, u)$

Paso Terminal (t = 3)

- Comenzamos por el último período, $T = 3$.
- La **función objetivo instantánea** es $f(t, x, u) = 1 + x - u^2$.
- La **función de valor en el tiempo** T es:
  - $J_3(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} (1 + x - u^2)$
- Para maximizar esta expresión con respecto a u, observamos que el término $-u^2$ alcanza su máximo cuando $u = 0$.
- **Control Óptimo en t=3:** $\mathbf{u_3^*(x) = 0}$
- **Función de Valor en t=3:** $\mathbf{J_3(x) = 1 + x}$

Paso (t = 2)

- Ahora calculamos la función de valor para $s = 2$ usando la Ecuación de Bellman:
  - $J_2(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} [f(2, x, u) + J_3(g(2, x, u))]$
- Sustituimos $f(2, x, u) = 1 + x - u^2$ y $g(2, x, u) = x + u$:
  - $J_2(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} [1 + x - u^2 + J_3(x + u)]$
- Sabemos que $J_3(y) = 1 + y$, así que $J_3(x + u) = 1 + (x + u)$.
- **La expresión a maximizar es**:
  - $J_2(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} [1 + x - u^2 + 1 + x + u]$
  - $J_2(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} [2 + 2x + u - u^2]$
- Derivamos con respecto a u e igualamos a cero para encontrar el máximo:
  - $\frac{\partial}{\partial u}(2 + 2x + u - u^2) = 1 - 2u = 0 \implies \mathbf{u_2^*(x) = 1/2}$
- **Función de Valor en t=2**: Sustituyendo $u = 1/2$ en la expresión de $J_2(x)$:
  - $J_2(x) = 2 + 2x + 1/2 - (1/2)^2 = 2 + 2x + 1/2 - 1/4 = \mathbf{9/4 + 2x}$

Paso (t = 1)

- Calculamos la función de valor para $s = 1$:
  - $J_1(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} [f(1, x, u) + J_2(g(1, x, u))]$
- Sustituimos $f(1, x, u) = 1 + x - u^2$ y $g(1, x, u) = x + u$:
  - $J_1(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} [1 + x - u^2 + J_2(x + u)]$
- Sabemos que $J_2(y) = 9/4 + 2y$, así que $J_2(x + u) = 9/4 + 2(x + u)$.
- **La expresión a maximizar es**:
  - $J_1(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} [1 + x - u^2 + 9/4 + 2x + 2u]$
  - $J_1(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} [13/4 + 3x + 2u - u^2]$
- Derivamos con respecto a u e igualamos a cero:
  - $\frac{\partial}{\partial u}(13/4 + 3x + 2u - u^2) = 2 - 2u = 0 \implies \mathbf{u_1^*(x) = 1}$
- **Función de Valor en t=1**: Sustituyendo $u = 1$ en la expresión de $J_1(x)$:
  - $J_1(x) = 13/4 + 3x + 2(1) - (1)^2 = 13/4 + 3x + 2 - 1 = \mathbf{17/4 + 3x}$

Paso Inicial (t = 0)

- Finalmente, calculamos la función de valor para $s = 0$:
  - $J_0(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} [f(0, x, u) + J_1(g(0, x, u))]$
- Sustituimos $f(0, x, u) = 1 + x - u^2$ y $g(0, x, u) = x + u$:
  - $J_0(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} [1 + x - u^2 + J_1(x + u)]$
- Sabemos que $J_1(y) = 17/4 + 3y$, así que $J_1(x + u) = 17/4 + 3(x + u)$.
- **La expresión a maximizar es**:
  - $J_0(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} [1 + x - u^2 + 17/4 + 3x + 3u]$
  - $J_0(x) = \max_{u \in \mathbb{R}} [21/4 + 4x + 3u - u^2]$
- Derivamos con respecto a u e igualamos a cero:
  - $\frac{\partial}{\partial u}(21/4 + 4x + 3u - u^2) = 3 - 2u = 0 \implies \mathbf{u_0^*(x) = 3/2}$
- **Función de Valor en t=0**: Sustituyendo $u = 3/2$ en la expresión de $J_0(x)$:
  - $J_0(x) = 21/4 + 4x + 3(3/2) - (3/2)^2 = 21/4 + 4x + 9/2 - 9/4 = \mathbf{15/2 + 4x}$

Controles Óptimos

- Observamos que en este problema particular, los **controles óptimos son constantes**, es decir, no dependen del estado x.
- Los valores óptimos de los controles son:
  - $\mathbf{u_0^* = 3/2}$
  - $\mathbf{u_1^* = 1}$
  - $\mathbf{u_2^* = 1/2}$
  - $\mathbf{u_3^* = 0}$

Trayectoria Óptima del Estado

- Con los controles óptimos y el estado inicial $x_0 = 0$, podemos calcular la **trayectoria óptima de los estados** usando la ecuación de diferencia $x_{t+1} = x_t + u_t$:
  - $\mathbf{x_0 = 0}$ (dado)
  - $\mathbf{x_1^* = x_0 + u_0^* = 0 + 3/2 = 3/2}$
  - $\mathbf{x_2^* = x_1^* + u_1^* = 3/2 + 1 = 5/2}$
  - $\mathbf{x_3^* = x_2^* + u_2^* = 5/2 + 1/2 = 3}$

SOLUCION ALTERNATIVA: Expresando el Estado en Función del Control

- Utilizando la ecuación de diferencia $x_{t+1} = x_t + u_t$ y el estado inicial dado $x_0 = 0$:
  - Para $t = 0$: $x_1 = x_0 + u_0 = 0 + u_0 = \mathbf{u_0}$
  - Para $t = 1$: $x_2 = x_1 + u_1 = \mathbf{u_0} + \mathbf{u_1}$
  - Para $t = 2$: $x_3 = x_2 + u_2 = \mathbf{u_0} + \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}$
- De esta manera, los estados futuros (x_1, x_2, x_3) quedan expresados en términos de las variables de control.
- La función objetivo original es la sumatoria de utilidades en cada período:
  - $I = (1 + x_0 - u_0^2) + (1 + x_1 - u_1^2) + (1 + x_2 - u_2^2) + (1 + x_3 - u_3^2)$
- Sustituyendo las expresiones de los estados obtenidas en la diapositiva anterior:
  - $I = (1 + 0 - u_0^2) + (1 + u_0 - u_1^2) + (1 + u_0 + u_1 - u_2^2)$ $+ (1 + u_0 + u_1 + u_2 - u_3^2)$
- **Simplificando** y agrupando términos, la función objetivo se convierte en una función de solo los controles:
  - $I = \mathbf{4 + 3u_0 - u_0^2 + 2u_1 - u_1^2 + u_2 - u_2^2 - u_3^2}$

Maximización por Cálculo Diferencial

- El problema se ha reducido a **maximizar la función I con respecto a las variables de control** u_0, u_1, u_2, u_3.
- Dado que I es una suma de funciones cóncavas, la función I en sí es cóncava. Esto implica que cualquier punto estacionario (donde las derivadas parciales son cero) será un máximo global.
- Para encontrar el máximo, calculamos las **derivadas parciales de J** con respecto a cada variable de control y las igualamos a cero.
- $\frac{\partial I}{\partial u_0} = 3 - 2u_0 = 0 \implies \mathbf{u_0^* = 3/2}$
- $\frac{\partial I}{\partial u_1} = 2 - 2u_1 = 0 \implies \mathbf{u_1^* = 1}$
- $\frac{\partial I}{\partial u_2} = 1 - 2u_2 = 0 \implies \mathbf{u_2^* = 1/2}$
- $\frac{\partial I}{\partial u_3} = -2u_3 = 0 \implies \mathbf{u_3^* = 0}$
- Este conjunto de valores $(\mathbf{3/2, 1, 1/2, 0})$ representa el control óptimo.

Trayectoria Óptima del Estado y Valor Máximo

- Una vez que se han determinado los controles óptimos, se puede calcular la trayectoria óptima de los estados utilizando la ecuación de diferencia:
  - $x_0 = 0$ (dado)
  - $x_1^* = x_0 + u_0^* = 0 + 3/2 = \mathbf{3/2}$
  - $x_2^* = x_1^* + u_1^* = 3/2 + 1 = \mathbf{5/2}$
  - $x_3^* = x_2^* + u_2^* = 5/2 + 1/2 = \mathbf{3}$

Ejemplos de

6

Introducción a la resolución de modelos dinámicos recursivos.

María José Bianco
Javier I. García Fronti

.UBAeconómicas
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS

$$\begin{cases} \max_{u_t} V = \sum_{t=0}^{2} -(x_t^2 + u_t^2) - x_3^2 \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = 2x_t + u_t \quad \text{para } t = 0,1,2 \\ \text{con } x_0 = 5 \end{cases}$$

1. Definimos $V_3(x_3) = -x_3^2$
2. Sea t =2. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_2(x_2) = \max_{u_2}[-(x_2^2 + u_2^2) + V_3(x \\ \text{sujeto a} \quad x_3 = 2x_2 + u_2 \end{cases}$$

$$V_2(x_2) = \max_{u_2}[-(x_2^2 + u_2^2) - (2x_2 + u_2)^2]$$

Derivamos V_2 respecto de u_2

$$\frac{\partial V_2}{\partial u_2} = -2u_2 - 2(2x_2 + u_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_2 =$$

Reemplazando en (6-12), se obtiene

$$V_2(x_2) = -3x_2^2$$

3. Sea t = 1. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_1(x_1) = \max_{u_1}[-(x_1^2 + u_1^2) + V_2(x_2)] \\ \text{sujeto a} \quad x_2 = 2x_1 + u_1 \end{cases}$$

Equivalentemente

$$V_1(x_1) = \max_{u_1}[-(x_1^2 + u_1^2) - 3(2x_1 + u_1)^2]$$

Derivamos V_1 respecto de u_1

$$\frac{\partial V_1}{\partial u_1} = -2u_1 - 6(2x_1 + u_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_1 = -\frac{3}{2}x_1$$

Reemplazando en (6-13), se obtiene

$$V_1(x_1) = -4x_1^2$$

4. Sea t = 0. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_0(x_0) = \max_{u_0}[-(x_0^2 + u_0^2) + V_1(x_1)] \\ \text{sujeto a} \quad x_1 = 2x_0 + u_0 \end{cases}$$

Equivalentemente

$$V_0(x_0) = \max_{u_0}[-(x_0^2 + u_0^2) - 4(2x_0 + u_0)^2] \qquad (6\text{-}14)$$

Derivamos V_0 respecto de u_0

$$\frac{\partial V_0}{\partial u_0} = -2u_0 - 8(2x_0 + u_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_0 = -\frac{8}{5}x_0$$

Reemplazando en (6-14), se obtiene

$$V_0(x_0) = -\frac{21}{5}x_0^2$$

Por lo tanto, se obtiene la misma secuencia óptima

$$u_0^* = -8 \qquad x_1^* = 2$$
$$u_1^* = -3 \qquad x_2^* = 1$$
$$u_2^* = -1 \qquad x_3^* = 1$$

María José Bianco
Javier I. García Fronti

Ejemplo 4: Continuación del Ejemplo 2

$$\begin{cases} \max_{u_t} V = \sum_{t=0}^{T} \sqrt{u_t} \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = x_t - u_t \quad \text{para } t = 0, \dots, T \\ \text{con} \quad x_0 = c \quad x_{T+1} = 0 \end{cases}$$

1. Definimos $V_{T+1}(x_{T+1}) = 0$
2. Sea t = T. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_T(x_T) = \max_{u_T} \left[\sqrt{u_T} + V_{T+1}(x_{T+1})\right] \\ \text{sujeto a} \quad x_{T+1} = x_T - u_T \end{cases}$$

Como $x_{T+1} = 0$ entonces $u_T = x_T$

Luego

$$V_T(x_T) = \sqrt{x_T}$$

3. Sea t = T-1. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_{T-1}(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1}} \left[\sqrt{u_{T-1}} + V_T(x_T)\right] \\ \text{sujeto a} \quad x_T = x_{T-1} - u_{T-1} \end{cases}$$

Equivalentemente

$$V_{T-1}(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1}} \left[\sqrt{u_{T-1}} + \sqrt{x_{T-1} - u_{T-1}}\right]$$

Derivamos V_{T-1} respecto de u_{T-1}

$$\frac{\partial V_{T-1}}{\partial u_{T-1}} = \frac{1}{2\sqrt{u_{T-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{x_{T-1} - u_{T-1}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{T-1} = \frac{1}{2} x_{T-1}$$

Reemplazando en (6-15):

$$V_{T-1}(x_{T-1}) = \sqrt{2}\sqrt{x_{T-1}}$$

4. Sea t = T-2. Debemos resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} V_{T-2}(x_{T-2}) = \max_{u_{T-2}} \left[\sqrt{u_{T-2}} + V_{T-1}(x_{T-1})\right] \\ \text{sujeto a} \quad x_{T-1} = x_{T-2} - u_{T-2} \end{cases}$$

Equivalentemente

$$V_{T-2}(x_{T-2}) = \max_{u_{T-2}} \left[\sqrt{u_{T-2}} + \sqrt{2}\sqrt{x_{T-2} - u_{T-2}}\right] \qquad (6\text{-}16)$$

Derivamos V_{T-2} respecto de u_{T-2}

$$\frac{\partial V_{T-2}}{\partial u_{T-2}} = \frac{1}{2\sqrt{u_{T-2}}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x_{T-2} - u_{T-2}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{T-2} = \frac{1}{3} x_{T-2}$$

Reemplazando en (6-16):

$$V_{T-2}(x_{T-2}) = \sqrt{3}\sqrt{x_{T-2}}$$

Si continuamos con la recursividad se obtendrían las siguientes relaciones

$$u_t = \frac{1}{T-t+1} x_t$$

$$V_t(x_t) = \sqrt{T-t+1}\sqrt{x_t}$$

María José Bianco
Javier I. García Fronti

EJEMPLO 3

- **Función Objetivo (a maximizar):**

$$\max \sum_{t=0}^{T-1} -\frac{2}{3} u_t x_t + \ln x_T$$

Esta función representa la suma de utilidades instantáneas ($-\frac{1}{2} u_t x_t$) desde el p
$t = 0$ hasta $t = T - 1$, más una utilidad terminal ($\ln x_T$) al final del período T.

- **Ecuación de Movimiento (Restricción de estado)**:

$$x_{t+1} = x_t (1 + u_t x_t) \quad \text{para } t = 0, \ldots, T-1$$

Esta ecuación describe cómo evoluciona la variable de estado x_t al siguiente per
x_{t+1}, en función de su valor actual x_t y la decisión de control u_t.

- **Condiciones Iniciales y Restricciones**:
  - x_0 es una constante inicial positiva.
  - $u_t \geq 0$ (la variable de control u_t debe ser no negativa).
  - Dado que $x_0 > 0$ y $u_t \geq 0$, se garantiza que $x_t > 0$ para todo t.

Paso 1: Período Final (t = T)

- En el período final T, la función objetivo se reduce a la utilidad terminal, $\ln x_T$.
- Aplicando la ecuación (7) del Teorema 12.1.1:

$$J_T(x) = \max_{u \geq 0}(\ln x)$$

- Dado que la función $\ln x$ no depende de la variable de control u_T, cualquier u_T es óptimo en este punto, y la función de valor es simplemente:

$$\mathbf{J_T(x) = \ln x}$$

$$\max \sum_{t=0}^{T-1} -\frac{2}{3} u_t x_t + \ln x_T$$

$$x_{t+1} = x_t(1 + u_t x_t)$$

Paso 2: Período Anterior (t = T-1)

- Aplicamos la ecuación de Bellman (6) para $s = T-1$:

$$J_{T-1}(x) = \max_{u \geq 0} \left[-\frac{2}{3}ux + J_T(x(1+ux)) \right]$$

- Sustituimos $J_T(x)$ y la ecuación de movimiento $x_{t+1} = x_t(1+u_t x_t)$:

$$J_{T-1}(x) = \max_{u \geq 0} \left[-\frac{2}{3}ux + \ln(x(1+ux)) \right]$$

Esto se puede reescribir como:

$$J_{T-1}(x) = \max_{u \geq 0} \left[-\frac{2}{3}ux + \ln x + \ln(1+ux) \right]$$

- Para encontrar el valor óptimo de u que maximiza esta expresión, tomamos la derivada con respecto a u y la igualamos a cero (condición de primer orden):

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[-\frac{2}{3}ux + \ln x + \ln(1+ux) \right] = -\frac{2}{3}x + \frac{x}{1+ux} = 0$$

- Dado que $x > 0$, podemos dividir por x y simplificar la ecuación a:

$$-\frac{2}{3} + \frac{1}{1+ux} = 0$$
$$\frac{1}{1+ux} = \frac{2}{3}$$
$$1+ux = 3/2$$
$$ux = 1/2$$

- Despejando u, obtenemos la política de control óptimo para $t = T-1$:

$$\mathbf{u^*_{T-1}(x) = \frac{1}{2x}}$$

- Ahora, sustituimos este control óptimo de nuevo en la expresión para encontrar $J_{T-1}(x)$:

$$J_{T-1}(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2x}\right)x + \ln x + \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2x}\right)x\right)$$

$$\mathbf{J_{T-1}(x) = \ln x + C} \quad \text{donde } \mathbf{C} = -\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\max \sum_{t=0}^{T-1} -\frac{2}{3}u_t x_t + \ln x_T$$

$$x_{t+1} = x_t(1+u_t x_t)$$

Paso 3: Período T-2

- Aplicamos de nuevo la ecuación de Bellman (6) para $s = T-2$:

$$J_{T-2}(x) = \max_{u \geq 0} \left[-\frac{2}{3}ux + J_{T-1}(x(1+ux)) \right]$$

- Sustituyendo $J_{T-1}(x)$ con la forma $\ln x + C$:

$$J_{T-2}(x) = \max_{u \geq 0} \left[-\frac{2}{3}ux + (\ln(x(1+ux)) + C) \right]$$

$$J_{T-2}(x) = \max_{u \geq 0} \left[-\frac{2}{3}ux + \ln x + \ln(1+ux) + C \right]$$

- La expresión a maximizar con respecto a u es idéntica a la del período anterior, salvo por la constante C. Por lo tanto, el control óptimo sigue siendo el mismo:

$$\mathbf{u^*_{T-2}(x) = \frac{1}{2x}}$$

- Sustituyendo este valor de u en la expresión de $J_{T-2}(x)$:

$$J_{T-2}(x) = \left(-\frac{1}{4} + \ln x + \ln\left(\frac{3}{2}\right) \right) + C$$

$$J_{T-2}(x) = \ln x + C + C = \ln x + 2C$$

$$\mathbf{J_{T-2}(x) = \ln x + 2C}$$

4. Patrón General de la Solución

Se observa un patrón claro al trabajar hacia atrás:

- **Función de Valor Óptimo General**: Para cualquier período t (desde 0 hasta T), la función de valor óptimo es:

  $$\mathbf{J_t(x) = \ln x + (T - t)C}$$

  donde $C = -\frac{1}{3} + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

- **Política de Control Óptimo General**: La política de control óptimo para cualquier período t es:

  $$\mathbf{u_t^*(x) = \frac{1}{2x}}$$

  Es crucial notar que el control óptimo **depende del estado actual** x_t. Esto se conoce como un **control de lazo cerrado** (closed-loop control). Este tipo de control es el que generalmente se obtiene con la programación dinámica. Esto contrasta con "Example 2", donde los controles óptimos eran constantes e independientes del estado.

5. Trayectoria Óptima de la Variable de Estado

Para determinar cómo evoluciona el estado x_t a lo largo del tiempo bajo la política óptima, sustituimos el control óptimo $u_t^*(x_t)$ en la ecuación de movimiento del estado:

- Ecuación de movimiento: $x_{t+1} = x_t(1 + u_t x_t)$.
- Sustituyendo $u_t^*(x_t) = \frac{1}{2x_t}$:

$$x_{t+1} = x_t \left(1 + \left(\frac{1}{2x_t}\right) x_t\right)$$

$$x_{t+1} = x_t \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{x_{t+1} = \frac{3}{2} x_t}$$

Esta ecuación muestra que el stock de la variable de estado x_t crece a una tasa constante del 50% por período. Dada una condición inicial x_0, la trayectoria óptima del estado es una progresión geométrica:

$$\mathbf{x_t = \left(\frac{3}{2}\right)^t x_0}$$

Finalmente, los valores óptimos del control u_t^* a lo largo de esta trayectoria serán:

$$\mathbf{u_t^* = \frac{1}{2x_t} = \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t x_0}}$$

EULER

6

Introducción a la resolución de modelos dinámicos recursivos.

María José Bianco
Javier I. García Fronti

6.1.3 Resolución por Ecuación de Euler

Si el conjunto de variables de estado es convexo para todo *t* y para toda *x* y la función *f* es estrictamente cóncava (para un problema de maximización) y diferenciable para (x, u), entonces la función valor es diferenciable.

Dada la función de política $u_t^* = h(x_t)$, se reemplaza en la función de transición, obteniendo $x_{t+1} = g(x_t, u_t) = g(x_t, h(x_t))$. Reemplazamos ambas ecuaciones en la ecuación de Bellman maximizada, con lo cual se obtiene la siguiente relación:

$$V_t(x_t) = f(x_t, u_t) + V_{t+1}(x_{t+1}) = f(x_t, h(x_t)) + V_{t+1}(g(x_t, h(x_t)))$$

Por lo tanto, la variación de x_t afecta directamente a la función valor a través de la ecuación de movimiento y a través de la función de política. Luego, por el teorema de la envolvente se llega a la ecuación de **Benveniste y Scheinkman**:

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial f}{\partial x_t} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial x_t} \qquad (6\text{-}17)$$

1) Se busca la condición de primer orden, es decir, se deriva la ecuación de Bellman respecto de la variable control u_t (esta ecuación va igualada a cero por ser la condición de primer orden)

$$\frac{\partial V_t}{\partial u_t} = \frac{\partial f}{\partial u_t} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0$$

Luego se despeja $\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$:

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_t}}{\frac{\partial g}{\partial u_t}} \qquad (6\text{-}18)$$

2) Se obtiene la ecuación de Benveniste y Scheinkman derivando la ecuación Bellman respecto de la variable de estado x_t

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial f}{\partial x_t} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial g}{\partial x_t}$$

Reemplazamos la expresión (6-18) en la ecuación de Benveniste y Scheinkman

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial f}{\partial x_t} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_t}}{\frac{\partial g}{\partial u_t}} \frac{\partial g}{\partial x_t} \qquad (6\text{-}19)$$

3) Adelantamos un período la expresión (6-19):

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{t+1}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g}{\partial u_{t+1}}} \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}} \qquad (6\text{-}20)$$

4) Reemplazamos esta última expresión en la condición de primer orden, o bien en(6-18):

$$\frac{\partial f}{\partial u_t} + \left[\frac{\partial f}{\partial x_{t+1}} - \frac{\frac{\partial f}{\partial u_{t+1}}}{\frac{\partial g}{\partial u_{t+1}}} \frac{\partial g}{\partial x_{t+1}} \right] \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0$$

Ecuación de Euler

Observación 5: La ecuación de Euler junto con la ecuación de transición forman un sistema de ecuaciones en diferencias que, si se puede resolver, permitiría obtener las trayectorias óptimas de las variables de estado y control

$$\begin{cases} \max_{u_t} V = \sum_{t=0}^{T} \sqrt{u_t} \\ \text{sujeto a} \quad x_{t+1} = x_t - u_t \quad \text{para } t = 0, \ldots, T \\ \text{con } x_0 = c \quad x_{T+1} = 0 \end{cases}$$

$$V_t(x_t) = \sqrt{u_t} + V_{t+1}(x_{t+1})$$

1) Buscamos la condición de primer orden, es decir, derivamos la ecuación de Bellman respecto de la variable control u_t

$$\frac{\partial V_t}{\partial u_t} = \frac{1}{2\sqrt{u_t}} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial x_{t+1}}{\partial u_t} = \frac{1}{2\sqrt{u_t}} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}}(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \frac{1}{2\sqrt{u_t}} \qquad (6\text{-}21)$$

2) Buscamos la ecuación de Benveniste y Scheinkman derivando la ecuación Bellman respecto de la variable de estado x_t

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} \frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} = \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$$

Reemplazamos la expresión (6-21) en la ecuación de Benveniste y Scheinkman

$$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{1}{2\sqrt{u_t}} \qquad (6\text{-}22)$$

3) Adelantamos un período la expresión (6-22):

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \frac{1}{2\sqrt{u_{t+1}}}$$

4) Reemplazamos esta última expresión en (*):

$$\frac{1}{2\sqrt{u_{t+1}}} = \frac{1}{2\sqrt{u_t}}$$

La **Ecuación de Euler** de este problema es:

$$\boxed{u_{t+1} = u_t}$$

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t - u_t \\ u_{t+1} = u_t \end{cases}$$

$$u_t = K_1$$

$$x_t = K_2 - K_1 t$$

Dadas las condiciones t $x_0 = c$ y $x_{T+1} = 0$ se obtiene:

$$u_t^* = \frac{c}{T+1} \qquad x_t^* = c - \frac{c}{T+1} t$$

$$\begin{cases} \max_{c_t} U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln c_t \\ \text{sujeto a} \quad s_{t+1} = \alpha(s_t - c_t) \quad \text{para} \quad t = 0, \ldots, T \\ \text{con} \quad s_0 \text{ dado} \quad s_{T+1} = 0 \end{cases}$$

La ecuación de Bellman para problemas con factor de descuento es:

$$W_t(s_t) = \ln c_t + \beta W_{t+1}(s_{t+1})$$

1) Aplicamos la condición de primer orden

$$\frac{\partial W_t}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \alpha\beta \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = \frac{1}{\alpha\beta\, c_t}$$

2) Hallamos la ecuación de Benveniste y Scheinkman

$$\frac{\partial W_t}{\partial s_t} = \alpha\beta \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = \frac{1}{c_t}$$

3) Corremos un período y reemplazamos en la condición de primer orden

$$\frac{1}{c_{t+1}} = \frac{1}{\alpha\beta\, c_t}$$

La **ecuación de Euler** es

$$\boxed{c_{t+1} = \alpha\beta\, c_t}$$

- Ahora resolvemos el sistema de ecuaciones en diferencias

El sistema que debemos resolver es:

$$\begin{cases} c_{t+1} = \alpha\beta\, c_t \\ s_{t+1} = \alpha(s_t - c_t) \end{cases}$$

Al resolver la primera ecuación obtenemos

$$\boxed{c_t = A_1[\alpha\beta]^t}$$

Reemplazando en la segunda ecuación y resolviendo

$$\boxed{k_t = A_2\alpha^t + \frac{A_1}{1-\beta}[\alpha\beta]^t}$$

Propuesta didáctica

1. Capítulo 6 de Bianco/García Fronti. Resolver TODOS los ejemplos

2. Resolver los ejemplos de la sección 12.1 del “Further Mathematics for Economics Analysis”

3. Resolver los ejercicios 1, 4, 6 y 7 propuestos en las páginas 431 y 432 del libro “Further Mathematics for Economics Analysis”

Ejercicio 1

(a) Utilice el Teorema 12.1.1 para resolver el problema

$$\max \sum_{t=0}^{2} [1 - (x_t^2 + 2u_t^2)], \quad x_{t+1} = x_t - u_t, \quad t = 0, 1$$

donde $x_0 = 5$ y $u_t \in \mathbb{R}$. (Calcule $J_s(x)$ y $u_s^*(x)$ para $s = 2, 1, 0$.)

Ejercicio 4

4. Considere el problema

$$\max_{u_t \in [0,1]} \sum_{t=0}^{T} (3 - u_t) x_t^2, \quad x_{t+1} = u_t x_t, \quad t = 0, \ldots, T-1, \quad x_0 \text{ está dado}$$

(a) Calcule las funciones de valor $J_T(x), J_{T-1}(x), J_{T-2}(x)$, y las funciones de control correspondientes, $u_T^*(x), u_{T-1}^*(x)$, y $u_{T-2}^*(x)$.

(b) Encuentre una expresión para $J_{T-n}(x)$ para $n = 0, 1, \ldots, T$, y los controles óptimos correspondientes.

Ejercicio 6

6. (a) Escriba las ecuaciones fundamentales para el problema

$$\max_{u_t \in \mathbb{R}} \sum_{t=0}^{T} (x_t - u_t^2), \quad x_{t+1} = 2(x_t + u_t), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \quad x_0 = 0$$

(b) Demuestre que la función de valor para el problema está dada por

$$J_{T-n}(x) = (2^{n+1} - 1)x + \sum_{j=0}^{n} (2^j - 1)^2, \quad n = 0, 1, \ldots, T$$

Determine los controles óptimos $u_t = u_t^*$ y el valor máximo $V = J_0(0)$.

Ejercicio 7

7. (a) Considere el problema

$$\max_{u_t \in \mathbb{R}} \left[\sum_{t=0}^{T-1} (-e^{-\gamma u_t}) - \alpha e^{-\gamma x_T} \right], \quad x_{t+1} = 2x_t - u_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \quad x_0 \text{ dado}$$

donde α y γ son constantes positivas. Calcule $J_T(x)$, $J_{T-1}(x)$, y $J_{T-2}(x)$.

(b) Demuestre que $J_t(x)$ puede escribirse en la forma $J_t(x) = -\alpha_t e^{-\gamma x}$, y encuentre una ecuación en diferencias para α_t.